方程式論としての Galois 理論
(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: **分離的 (重根を持たない) で monic な n 次多項式**

$$W := \{w \in \overline{K} \mid f(w) = 0\} \text{ : } f \text{ の根全体}$$
$$=: \{w_1, \ldots, w_n\}$$

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - w_i)$$

f **の** K **上の Galois 群** $\mathrm{Gal}(f/K)$:
“f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を保つような根の置換” 全体の成す群

方程式論としての Galois 理論 (根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \ldots, X_n]$: n **変数多項式環**

$$\varphi : R \longrightarrow \overline{K} : \textbf{環準同型}$$
$$X_i \longmapsto w_i$$

$I = I(f/K) := \mathrm{Ker}\varphi$

: "f の根 w_i 達の K 係数の関係式" の ideal

$\mathrm{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) \subset I\}$

: f の K 上の Galois 群

例 (複二次式)

$f(X) = X^4 - 4aX^2 + 4b \in K := \mathbf{Q}(a, b)$

4 **根:** $w_1, w_2, w_3 = -w_1, w_4 = -w_2$

$X_1 + X_3, X_2 + X_4 \in I(f/K)$

$\mathrm{Gal}(f/K) \subset \langle \alpha, \beta \rangle \simeq D_4$ **(4 次の二面体群)**

ここに $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4), \beta = (2\ 4)$

a, b **の値によっては、**
$\mathrm{Gal}(f/K)$ **が** D_4 **より小さくなることもある**

例 (複二次式)

$$X^4 - 4aX^2 + 4b = 0$$

$$X = \pm\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}$$

$$= \pm\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

$\mathrm{Gal}(f/K)$ **が** D_4 **より小さくなる場合:**

(1) X^2 **の多項式として可約 (**$a^2 - b = \square$**)**
(2) 二重根号が外せる ($b = \square$**)**
(3) 二重根号は外せないが、中の根号が共通
($a^2 - b = b \cdot \square$**)**

例 (複二次式)

$$X^4 - 4aX^2 + 4b = 0$$

$$X = \pm\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}$$

$$= \pm\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

$\mathrm{Gal}(f/K)$ **が** D_4 **より小さくなる場合:**

(1) X^2 **の多項式として可約** ($a^2 - b = \square$)
(2) 二重根号が外せる ($b = \square$)
(3) 二重根号は外せないが、中の根号が共通 ($a^2 - b = b\cdot\square$)

体拡大の Galois 群との関係

$\mathrm{L} := \mathrm{Spl}(f/K) = K(W) = K(w_1, \ldots, w_n)$

: f の K 上の最小分解体

$\mathrm{Gal}(L/K) := \{\sigma : L \longrightarrow L \mid K\text{-}$**同型**$\}$

: 体拡大 L/K の Galois 群

$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ **は根の置換を引き起こす**

$$\mathrm{Gal}(L/K) \subset \mathfrak{S}(W) \simeq \mathfrak{S}_n$$

$$\boxed{\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(f/K)}$$