

方程式論としての Galois 理論

(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: 分離的 (重根を持たない) で
monic な n 次多項式

$W := \{w \in \bar{K} \mid f(w) = 0\}$: f の根全体
 $=: \{w_1, \dots, w_n\}$

$$f(X) = \prod_{i=1}^n (X - w_i)$$

f の K 上の **Galois 群** $\text{Gal}(f/K)$:

“ f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を
保つような根の置換” 全体の成す群

方程式論としての Galois 理論

(根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \dots, X_n]$: n 変数多項式環

$\varphi : R \longrightarrow \bar{K}$: 環準同型

$X_i \longmapsto w_i$

$I = I(f/K) := \text{Ker}\varphi$

: “ f の根 w_i 達の K 係数の関係式” の ideal

$\text{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(I) \subset I\}$

: f の K 上の **Galois 群**

例 (複二次式)

$$f(X) = X^4 - 4aX^2 + 4b \in K := \mathbf{Q}(a, b)$$

$$4 \text{ 根: } w_1, w_2, w_3 = -w_1, w_4 = -w_2$$

$$X_1 + X_3, X_2 + X_4 \in I(f/K)$$

$$\text{Gal}(f/K) \subset \langle \alpha, \beta \rangle \simeq D_4 \text{ (4 次の二面体群)}$$

$$\text{ここに } \alpha = (1\ 2\ 3\ 4), \beta = (2\ 4)$$

a, b の値によっては、

$\text{Gal}(f/K)$ が D_4 より小さくなることもある

例 (複二次式)

$$X^4 - 4aX^2 + 4b = 0$$

$$\begin{aligned} X &= \pm \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}} \\ &= \pm \sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} \end{aligned}$$

$\text{Gal}(f/K)$ が D_4 より小さくなる場合:

- (1) X^2 の多項式として可約 ($a^2 - b = \square$)
- (2) 二重根号が外せる ($b = \square$)
- (3) 二重根号は外せないが、中の根号が共通
($a^2 - b = b \cdot \square$)

体拡大の Galois 群との関係

$L := \text{Spl}(f/K) = K(W) = K(w_1, \dots, w_n)$
: f の K 上の最小分解体

$\text{Gal}(L/K) := \{\sigma : L \rightarrow L \mid K\text{-同型}\}$
: 体拡大 L/K の **Galois 群**

$\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ は根の置換を引き起こす

$$\text{Gal}(L/K) \subset \mathfrak{S}(W) \simeq \mathfrak{S}_n$$

$$\text{Gal}(L/K) = \text{Gal}(f/K)$$