

方程式論としての Galois 理論

(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: 分離的 (重根を持たない) で
monic な n 次多項式

$W := \{w \in \bar{K} \mid f(w) = 0\}$: f の根全体
 $=: \{w_1, \dots, w_n\}$

$$f(X) = \prod_{i=1}^n (X - w_i)$$

f の K 上の **Galois 群** $\text{Gal}(f/K)$:

“ f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を
保つような根の置換” 全体の成す群

方程式論としての Galois 理論

(根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \dots, X_n]$: n 変数多項式環

$\varphi : R \longrightarrow \bar{K}$: 環準同型

$X_i \longmapsto w_i$

$I = I(f/K) := \text{Ker}\varphi$

: “ f の根 w_i 達の K 係数の関係式” の ideal

$\text{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(I) \subset I\}$

: f の K 上の **Galois 群**

体拡大の Galois 群との関係

$L := \text{Spl}(f/K) = K(W) = K(w_1, \dots, w_n)$
: f の K 上の最小分解体

$\text{Gal}(L/K) := \{\sigma : L \rightarrow L \mid K\text{-同型}\}$
: 体拡大 L/K の **Galois 群**

$\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ は根の置換を引き起こす

$$\text{Gal}(L/K) \subset \mathfrak{S}(W) \simeq \mathfrak{S}_n$$

$$\text{Gal}(L/K) = \text{Gal}(f/K)$$

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

L/K : 体の拡大

$$G := \text{Aut}(L/K) = \{\sigma \in \text{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \text{id}\}$$

- $H \subset G$: 部分群に対し、
 $L^H := \{x \in L \mid \forall \sigma \in H : \sigma(x) = x\}$
: H の**固定体 (fixed field)**
- $M : L/K$ の中間体に対し、
 $\text{Aut}(L/M) = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M : \sigma(x) = x\}$
: L の M 上の**自己同型群**

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

自明に

$$\text{Aut}(L/L^H) \supset H, \quad L^{\text{Aut}(L/M)} \supset M$$

ここで $=$ が成り立つか？

一般には成り立たないが、Galois 拡大なら OK

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

自明に

$$\text{Aut}(L/L^H) \supset H, \quad L^{\text{Aut}(L/M)} \supset M$$

ここで = が成り立つか？

一般には成り立たないが、Galois 拡大なら OK

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

自明に

$$\text{Aut}(L/L^H) \supset H, \quad L^{\text{Aut}(L/M)} \supset M$$

ここで $=$ が成り立つか？

一般には成り立たないが、**Galois 拡大**なら OK

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

“Galois 拡大” とは、

“ $\text{Aut}(L/K)$ が充分大きく、
体拡大 L/K を統制できる拡大”

Galois 理論の基本定理

||

中間体と部分群との対応

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

体の有限次拡大 L/K が **Galois 拡大**



$$\#\text{Aut}(L/K) = [L : K]$$



$$L^{\text{Aut}(L/K)} = K$$



L/K : 正規拡大 かつ 分離拡大

この時、 $\text{Aut}(L/K) = \text{Gal}(L/K)$ と書き、

L/K の **Galois 群** と呼ぶ