方程式論としての Galois 理論
(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: **分離的 (重根を持たない) で monic な n 次多項式**

$$W := \{w \in \overline{K} \mid f(w) = 0\} \text{ : } f \text{ の根全体}$$
$$=: \{w_1, \ldots, w_n\}$$

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - w_i)$$

f **の** K **上の Galois 群** $\mathrm{Gal}(f/K)$:
“f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を保つような根の置換” 全体の成す群

方程式論としての Galois 理論 (根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \ldots, X_n]$: n **変数多項式環**

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow \overline{K} : \textbf{環準同型} \\ X_i &\longmapsto w_i \end{aligned}$$

$I = I(f/K) := \mathrm{Ker}\varphi$

: **“f の根 w_i 達の K 係数の関係式” の ideal**

$\mathrm{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) \subset I\}$

: **f の K 上の Galois 群**

体拡大の Galois 群との関係

$L := \mathrm{Spl}(f/K) = K(W) = K(w_1, \ldots, w_n)$
: f の K 上の最小分解体

$\mathrm{Gal}(L/K) := \{\sigma : L \longrightarrow L | K\text{-}$同型$\}$
: 体拡大 L/K の Galois 群

$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ は根の置換を引き起こす

$$\mathrm{Gal}(L/K) \subset \mathfrak{S}(W) \simeq \mathfrak{S}_n$$

$$\boxed{\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(f/K)}$$

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

L/K : **体の拡大**

$G := \mathrm{Aut}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \mathrm{id}\}$

- $H \subset G$: **部分群に対し、**
  $L^H := \{x \in L \mid \forall \sigma \in H : \sigma(x) = x\}$
  : H **の固定体 (fixed field)**

- M : L/K **の中間体に対し、**
  $\mathrm{Aut}(L/M) = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M : \sigma(x) = x\}$
  : L **の** M **上の自己同型群**

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

自明に

$$\mathrm{Aut}(L/L^H) \supset H, \quad L^{\mathrm{Aut}(L/M)} \supset M$$

ここで $=$ が成り立つか？

一般には成り立たないが、Galois 拡大なら OK

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

“Galois 拡大” とは、

“$\mathrm{Aut}(L/K)$ **が充分大きく、**
体拡大 L/K **を統制できる拡大”**

Galois 理論の基本定理
‖
中間体と部分群との対応

体の拡大の理論としての Galois 理論(復習)

体の有限次拡大 L/K **が Galois 拡大**

$$\Updownarrow$$

$$\#\mathrm{Aut}(L/K) = [L:K]$$

$$\Updownarrow$$

$$L^{\mathrm{Aut}(L/K)} = K$$

$$\Updownarrow$$

L/K : **正規拡大 かつ 分離拡大**

この時、$\mathrm{Aut}(L/K) = \mathrm{Gal}(L/K)$ **と書き、**
L/K **の Galois 群 と呼ぶ**