レポート問題の例 (12/13 配布)

問 1. K を体とし、その代数閉包 $\overline{K}$ を 1 つ取って固定する。$f(X) \in K[X]$ を K 上の既約多項式とし、その一つの根を $\alpha \in \overline{K}$ とする。

(1) K 上の環準同型 $\varphi : K[X] \to \overline{K}; X \mapsto \alpha$ について、$\mathrm{Im}\varphi = K(\alpha)$ である。

(2) $\mathrm{Ker}\varphi = (f)$ である。これより、$K[X]/(f) \simeq K(\alpha)$ となる。

(3) $\iota : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K}$ を K 上の埋込とする。$\iota(\alpha)$ も f の根である。

(4) 逆に f の根 $\beta \in \overline{K}$ に対し、$\iota(\alpha) = \beta$ となる K 上の埋込 $\iota : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K}$ が一意に存在する。

(5) 以上により、$K(\alpha)$ の $\overline{K}$ への K の埋込全体と、f の根全体とは、一対一に対応する。

問 2. K を体とし、その代数閉包 $\overline{K}$ を 1 つ取って固定する。$f(X) \in K[X]$ を n 次分離的多項式、$W = \{w \in \overline{K} | f(w) = 0\} =: \{w_1, \ldots, w_n\}$ を f の根全体、$L = \mathrm{Spl}(f; K) = K(w_1, \ldots, w_n)$ を K 上の f の最小分解体とする。K 上の n 変数多項式環 $R := K[X_1, \ldots, X_n]$ に対し、K 上の環準同型 $\varphi : R \to L$ を $\varphi(X_i) = w_i$ で定め、$I = I(f; K) := \mathrm{Ker}\varphi$ とするとき、以下を示せ。

(1) (準備) 体上有限次元な整域は体である。

(2) φ は全射環準同型である。

(3) $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ は W の置換を定める。これより、$\mathrm{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ となる。(これにより $\mathrm{Gal}(L/K)$ を $\mathfrak{S}_n$ の部分群と同一視する。)

(4) $\mathrm{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) \subset I\}$ と定めると、$\mathrm{Gal}(f/K) = \mathrm{Gal}(L/K)$ である。

問 3. $f(X) \in K[X]$ を K 上の n 次 monic 多項式とし、その根を (重複度を込めて) $w_1, \ldots, w_n$ とする。根の差積の平方

$$D(f) := \prod_{1 \le i < j \le n} (w_i - w_j)^2$$

を f の**判別式 (discriminant)** という。

(1) f の微分 f' の根を $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (重根は重複度込みで考える) とするとき、

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(w_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} f(v_j).$$

(2) $f(X) = X^n - aX - b$ について判別式 $D(f)$ を求めよ。

問 4. (一部再掲) 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ について、

(1) 全ての元を列挙し、それぞれの位数を答えよ。

(2) 全ての部分群を列挙し、それらの包含関係を図示せよ。

(3) 具体的な $\boldsymbol{Z}$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ で、$\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群が $\mathfrak{S}_3$ と同型なものについて、f の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体 $K = \mathrm{Spl}(f/\boldsymbol{Q})$ の部分体を、$\mathfrak{S}_3$ の部分群と対応させて求めよ。

問 5. (一部再掲) 4 次二面体群 $D_4 = \langle \sigma, \tau | \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$ について、

(1) 全ての元を列挙し、それぞれの位数を答えよ。

(2) 全ての部分群を列挙し、それらの包含関係を図示せよ。

(3) D_4 は正方形の自己同型群であるので、正方形の 4 頂点の集合に自然に作用する。これから得られる 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ への D_4 の埋込み (単射準同型) $D_4 \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$ を求めよ。

(4) 具体的な $\boldsymbol{Z}$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ で、$\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群が D_4 と同型なものについて、f の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体 $K = \mathrm{Spl}(f/\boldsymbol{Q})$ の部分体を、D_4 の部分群と対応させて求めよ。

問 6. n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ について、$\alpha = (1\ 2\ \cdots\ n), \beta = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_n$ とするとき、$\mathfrak{S}_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ となることを示せ。また、n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ について、これと似たような生成系で表すことを考えよ。

問 7. p を素数とする。H を p 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ の可移部分群とする。

(1) H は p 次巡換を含むことを示せ。

(2) H が互換を 1 つでも含めば、$H = \mathfrak{S}_p$ であることを示せ。

問 8. 上問を踏まえて、

(1) $f(X) = X^5 - 20X + 5 \in \boldsymbol{Q}[X]$ について、$\mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q}) \simeq \mathfrak{S}_5$ であることを示せ。

(2) $\mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q}) \simeq \mathfrak{S}_7$ となる 7 次式 $f(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ の例を作れ。

問 9. 4 次既約分離多項式 $f(X) \in K[X]$ の 3 次分解式を

$$R_3(T) = R(X_1X_3 + X_2X_4; f)(T) \in K[T]$$

とする (Cardano-Ferrari の分解式)。

(1) $D(f) = D(R_3)$ を示せ。

(2) $R_3(T)$ の K 内での分解様式 (および判別式) による Galois 群の識別についてまとめよ。

(3) Galois 群が D_4 または C_4 の時は、これだけでは識別できない。どうすれば識別できるか。

(4) 代わりに $R((X_1 + X_3)(X_2 + X_4); f)(T)$ を考えるとどうか。

問 10. 二重根号 $\xi := \sqrt{a + 2\sqrt{b}}$ の解け方の分類を、$f(X) = X^4 - 2aX^2 + (a^2 - 4b)$ の Galois 群と関連させて述べよ。

問 11. 5 次既約分離多項式 $f(X) \in K[X]$ に対し、

$$P = (X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_5 + X_5X_1) - (X_1X_3 + X_3X_5 + X_5X_2 + X_2X_4 + X_4X_1)$$

とおき、P^2 に関する分解式 $R_6(T) = R(P^2; f)(T) \in K[T]$ を考える (Cayley-Weber の分解式)。$R_6(T)$ の K 内での分解様式 (および判別式) による Galois 群の識別についてまとめよ。

問 12. 次の多項式 $f(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q})$ を求め、f の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体 $K = \mathrm{Spl}(f/\boldsymbol{Q})$ の全ての部分体を、G の部分群との Galois 対応を明らかにして求めよ。

(1) $f(X) = X^3 - 2$

(2) $f(X) = X^5 - 2$

(3) $f(X) = X^3 - 3X + 1$

(4) $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1$

(5) $f(X) = X^4 - 20X^2 + 32$

(6) $f(X) = X^4 - 10X^2 + 5$

問 13. 上問の他にも、具体的な $\boldsymbol{Z}$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ で、Galois 群が決定出来るような、ほどほどに非自明な例を作って、Galois 群を決定してみせよ。

問 14. 適当な体 k 上の 1 変数有理関数体 $K = k(t)$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in K[X]$ で、Galois 群が決定出来るような、ほどほどに非自明な例を作って、Galois 群を決定してみせよ。また、$t = a \in k$ を代入して得られる多項式 $f_a(X) \in k[X]$ について、$\mathrm{Gal}(f_a/k) \subsetneq \mathrm{Gal}(f/K)$ となる $a \in k$ があればどんな時か論ぜよ。

問 15. その他、本講義の受講を機会に、新たに調べたり考えたりして解ったことがあれば、まとめてレポートとして良い。また、卒業研究などで本講義と関連した内容について論じた場合には、その内容をまとめて紹介してレポートに加えて良い。

レポート提出の要領

- 期日: 1 月 24 日 (火)(最終授業時) まで
- 「レポート問題の例」にある問題、および本講義に関連する内容について考察した問題について、何問か (内容の重みによって分量は適宜判断せよ) を考察して提出。
- 提出: 授業時に教室にて提出。