レポート問題の例 (2) (1/17 配布)

問 16. Galois 拡大 L/K に対する正規底定理について述べ、証明せよ。

問 17. $\boldsymbol{Q}$ 上の 3 変数有理関数体 $L=\boldsymbol{Q}(x_1,x_2,x_3)$ への、変数の置換作用での 3 次交代群 $\mathfrak{A}_3 \simeq C_3$ による固定体 $L^{\mathfrak{A}_3}$ を求め、その $\boldsymbol{Q}$ 上の有理性を示せ。

問 18. 3 次多項式 $f(t;X) := X^3 - tX^2 + (t-3)X + 1 \in \boldsymbol{Q}(t)[X]$ を考える。

(1) $\mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q}(t)) = C_3$ を示せ。

(2) この多項式を知らないとして、次のことから再構成せよ。

- (a) $\boldsymbol{Q}$ 上の射影直線 $\mathbf{P}^1(\boldsymbol{Q})$ の自己同型 σ で $0 \mapsto 1 \mapsto \infty \mapsto 0$ なるものを求めよ。
- (b) これにより定まる関数体 $\boldsymbol{Q}(s)$ への 3 次巡回群 $C_3 = \langle\sigma\rangle$ の作用を考える。s の C_3-軌道を根の集合とする 3 次多項式 $g(s;X) \in \boldsymbol{Q}(s)^{C_3}[X]$ を求めよ。
- (c) この作用による固定体 $\boldsymbol{Q}(s)^{C_3}$ を求め、それが $\boldsymbol{Q}$ 上有理的 ($\exists t \in \boldsymbol{Q}(s)^{C_3}$: $\boldsymbol{Q}(s)^{C_3} = \boldsymbol{Q}(t)$) であることを示せ。
- (d) 適切に t を選べば、$f(t;X) := g(s;X) \in \boldsymbol{Q}(t)[X]$ により、当初の C_3-多項式が再構成される。

(3) $f(t;X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上生成的な C_3-多項式であることを、次の要領で示せ。

- (a) C_3 の $\boldsymbol{Q}$ 上の置換表現 $V_0 = \boldsymbol{Q}v_1 \oplus \boldsymbol{Q}v_2 \oplus \boldsymbol{Q}v_3$ の $\boldsymbol{Q}$-上の既約分解を求めよ。
- (b) その 2 次元既約表現 $W_0 = \boldsymbol{Q}w_1 \oplus \boldsymbol{Q}w_2$ で、射影化 $\mathbf{P}(W) \simeq \mathbf{P}^1(\boldsymbol{Q})$ への作用が、$s := -\dfrac{w_2}{w_1}$ と置くと上の C_3-作用になるような基底 (w_1,w_2) を見出せ。
- (c) $\boldsymbol{Q}$ を含む任意の C_3-拡大 $L/K/\boldsymbol{Q}$ に対し、L の K-部分空間 W で $K[C_3]$-加群 (Galois 群の作用) として $W \simeq W_0 \otimes_{\boldsymbol{Q}} K$ となるものが存在する (即ち、Galois 群が上と同様に作用するような $w_1,w_2 \in L$ が存在する) ことを示せ。(ヒント: 正規底定理と有限群の表現論の知識を用いよ。)
- (d) この w_1,w_2 から、上述に従って $s,t \in L$ を定めると、$t \in K$ であって、$s \in L$ の C_3-軌道が潰れない (C_3 が忠実に作用する) 限り、$f(t;X) \in K[X]$ について $\mathrm{Spl}(f/K) = L$ となることを示せ。
- (e) 実際、$s \in L$ の C_3-軌道が潰れないか、または、その可能性があってもその場合は w_1,w_2 を適切に取り替えれば潰れないように出来ることを示すことにより、$f(t;X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上生成的な C_3-多項式であることを導け。

問 19. 4 次二面体群 $D_4 = \langle\alpha,\beta\rangle (\alpha = (1\ 2\ 3\ 4), \beta = (2\ 4))$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の 2 次元既約線型表現 $V = \langle v_1, v_2\rangle$ ($\alpha : v_1 \mapsto v_2 \mapsto -v_1 \mapsto -v_2 \mapsto v_1, \beta : v_1 \mapsto v_2 \mapsto v_1$) を考える。

(1) 2 変数有理関数体 $\boldsymbol{Q}(v_1,v_2)$ の D_4-固定体を求め、その $\boldsymbol{Q}$ 上の有理性を示せ。

(2) w_1 の D_4-軌道を根の集合とする多項式を考えることにより、D_4-多項式を構成せよ。

(3) 上で得た D_4-多項式が生成的であることを示せ。

問 20. 4 次二面体群 D_4 の置換表現 $V = \langle v_1,v_2,v_3,v_4\rangle$ とその射影表現 $\mathbf{P}(V)$ を考える。

(1) $w_1 := \dfrac{v_1}{v_3}, w_2 := \dfrac{v_2}{v_4}$ と置く。w_1,w_2 への D_4-作用を書き下せ。

(2) 2 変数有理関数体 $\boldsymbol{Q}(w_1,w_2)$ の D_4-固定体を求め、その $\boldsymbol{Q}$ 上の有理性を示せ。

(3) w_1 の D_4-軌道を根の集合とする多項式を考えることにより、D_4-多項式を構成せよ。

(4) 上で得た D_4-多項式が生成的であることを示せ。

問 21. 適当な体 k 上の有理関数体 $K = k(t_1,\ldots,t_n)$ への適当な有限群 G の作用について、ほどほどに非自明な例を作って、固定体 K^G (やその有理性) を決定したり、分解体が K となる K^G 上の G-多項式を求めたり、その k 上での生成性について論じたりせよ。

レポート提出の要領

- 期日: 1 月 24 日 (火)(最終授業時) まで
- 「レポート問題の例」にある問題、および本講義に関連する内容について考察した問題について、何問か (内容の重みによって分量は適宜判断せよ) を考察して提出。
- 提出: 授業時に教室にて提出。