

2

(1) $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$ の根は、

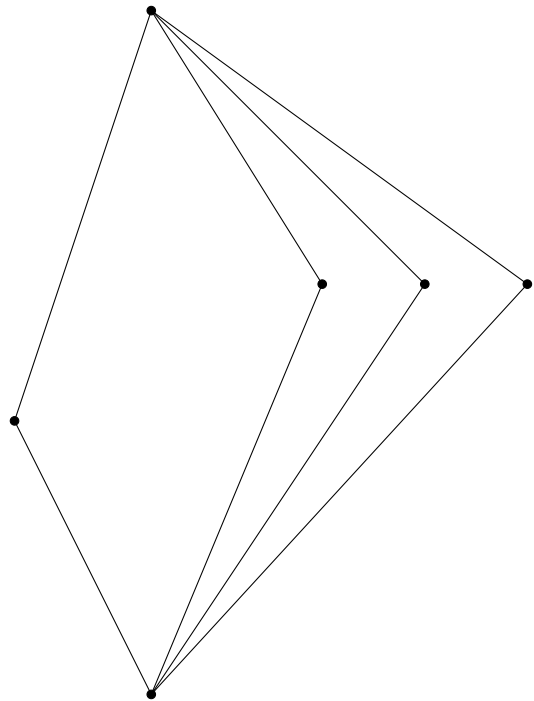
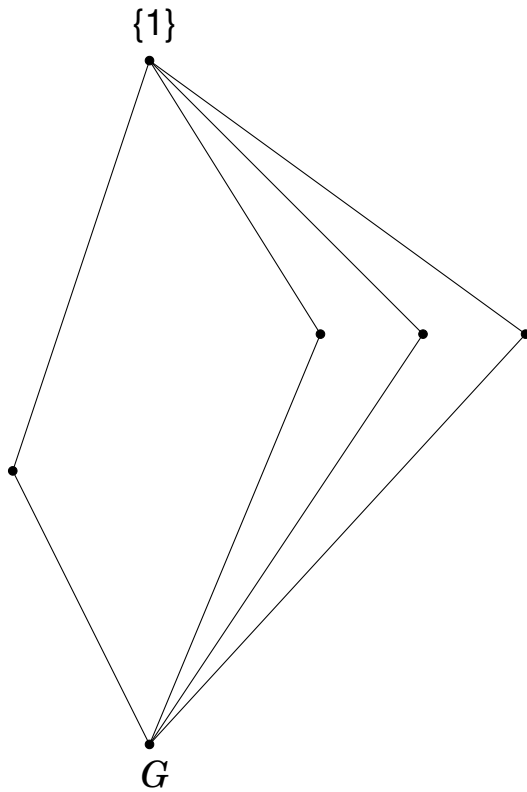
$$w_1 = \sqrt[3]{2}, \quad w_2 = \sqrt[3]{2}\omega, \quad w_3 = \sqrt[3]{2}\omega^2 \quad \left(\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \omega^2 + \omega + 1 = 0\right)$$

であり、 $L = \text{Spl}(f/\mathbf{Q})$ とするとき、

$$G = \text{Gal}(L/\mathbf{Q}) = \text{Gal}(f/\mathbf{Q}) = \mathfrak{S}_3 = \langle \alpha, \beta \rangle, \quad \alpha = (1\ 2\ 3), \beta = (2\ 3)$$

である。

- (a) 左側の図に \mathfrak{S}_3 の部分群を書き込め。
(Galois 対応を考慮して、上が小さく下が大きいようにしてある。)
(b) 左右が Galois 対応になるように、右側の図に L/\mathbf{Q} の中間体を書き込め。



(2) $f(X) = X^4 - 20X^2 + 32 \in \mathbf{Q}[X]$ の根は、

$$w_1 = \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}, \quad w_2 = \sqrt{10 - 2\sqrt{17}},$$

$$w_3 = -\sqrt{10 + 2\sqrt{17}}, \quad w_4 = -\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}$$

であり、 $L = \text{Spl}(f/\mathbf{Q})$ とするとき、

$$G = \text{Gal}(L/\mathbf{Q}) = \text{Gal}(f/\mathbf{Q}) = D_4 = \langle \alpha, \beta \rangle, \quad \alpha = (1\ 2\ 3\ 4), \beta = (2\ 4)$$

である。

(a) 左側の図に D_4 の部分群を書き込め。

(Galois 対応を考慮して、上が小さく下が大きいようにしてある。)

(b) 左右が Galois 対応になるように、右側の図に L/\mathbf{Q} の中間体を書き込め。

(c) f の根体の “反対側” の 4 次中間体は、どのような多項式の根体か。

