2011 年度後期

代数 7

(教育学部数学科)

(担当: 角皆)

Galois 理論

- 方程式の解け方の様子

- 体拡大の様子

を Galois 群によって計る

Galois 理論

“正問題”

多項式 $\longrightarrow$

・ Galois 群

体拡大 $\longleftarrow$

“逆問題”

“Inverse Galois Problem”

Galois 理論

“正問題”

$$\begin{array}{ccc} \text{多項式} & \longrightarrow & \\ \bullet & & \text{Galois 群} \\ \text{体拡大} & \longleftarrow & \end{array}$$

“逆問題”

“Inverse Galois Problem”

与えられた有限群 G に対し、

- G を Galois 群に持つ体拡大の存在／非存在
- 存在するならその具体的な構成
(多項式の最小分解体として構成)
$\longrightarrow$ Galois 群の構成問題
- パラメタ付の多項式による G-拡大の族の構成
- 全ての G-拡大を与える多項式の構成
(生成的多項式, generic polynomial)

「構成的 Galois 理論」

与えられた有限群 G に対し、

- G を Galois 群に持つ体拡大の存在／非存在
- 存在するならその具体的な構成
(多項式の最小分解体として構成)
$\longrightarrow$ Galois 群の構成問題
- パラメタ付の多項式による G-拡大の族の構成
- 全ての G-拡大を与える多項式の構成
(生成的多項式, generic polynomial)

「構成的 Galois 理論」

一般的な理論に乗る部分もあるが、

実際には

扱う体や有限群の個性が強く影響し、

一筋縄でいかない所がある。

$\cdots$ **特に実例を多く扱うことで**

「計算する数学」

の面白さを思い出してもらいたい。

(シラバスより)

本講義の概要・予定

- 古典的な方程式論
  (3 次・4 次方程式の根の公式)
- Galois 理論の復習
- Galois 群の計算例
- Galois の逆問題 (構成問題) について
- Galois 群の構成の幾つかの方法の紹介
  - ⋆ Hilbert の既約性定理とその応用
  - ⋆ Noether の問題とその応用
  - ⋆ Galois 剛性の利用

さて、初めに $\cdots$

3 **次方程式・**4 **次方程式の一般解法 (解の公式)**

って知ってますか？

$\longrightarrow$ **方程式の解法探求の歴史**

$\longrightarrow$ **まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう**
(人間と数学の歴史を振り返る)

さて、初めに $\cdots$

3 次方程式・4 次方程式の一般解法 (解の公式)

って知ってますか？

$\longrightarrow$ 方程式の解法探求の歴史

$\longrightarrow$ まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう
(人間と数学の歴史を振り返る)

さて、初めに $\cdots$

3 **次方程式・**4 **次方程式の一般解法 (解の公式)**

って知ってますか？

$\longrightarrow$ **方程式の解法探求の歴史**

$\longrightarrow$ **まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう**
(人間と数学の歴史を振り返る)

小学校：

- **自然数 (正の整数) の＋×**
- **ーは出来ない時がある**
- **÷は商と余りとを求める (整除)**
- **分数を用いた÷ (正の有理数)**
- **小数 (近似値・正の実数)**

中学・高校：

- 正負の数の四則 (＋－×÷)
- 文字式 (多項式) の＋－×
- ÷は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

ところで ···

大学で数学を習って

新しく出来るようになったことってある？

中学・高校：

- 正負の数の四則 (＋－×÷)
- 文字式 (多項式) の＋－×
- ÷は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算 (余りを求める)

$\Downarrow$

Gröbner 基底

(広中-Buchberger の algorithm)

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 $\longrightarrow$ 1 変数方程式へ (変数消去)

本講義の中で行なう計算にも不可欠!!

ここでは、

3 次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2 次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
(紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ (非整数も OK)
- (正数の範囲の) 引き算は OK
- 解も正の数のみ

2 次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。(**$a > 0, b > 0$**)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ **負の数は人間にとって考え難い?!)**

2 次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。(**$a > 0, b > 0$**)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ **負の数は人間にとって考え難い?!)**

2 次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。(**$a > 0, b > 0$**)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ **負の数は人間にとって考え難い?!)**

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「**根の公式**」とは：

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算 (小数)

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「根の公式」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算 (小数)

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「根の公式」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算 (小数)

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半　(del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
  (但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見ていこう。

(以下次回)