

2011 年度後期

代数7

(教育学部数学科)

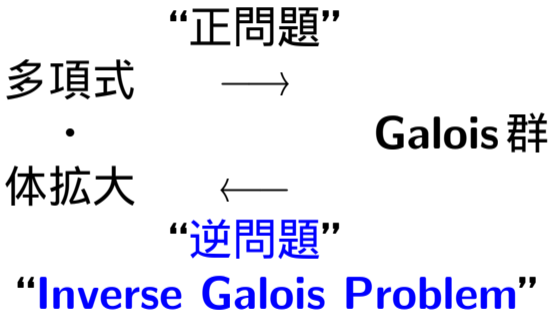
(担当: 角皆)

Galois 理論

- 方程式の解け方の様子
- 体拡大の様子

を **Galois 群** によって計る

Galois 理論



与えられた有限群 G に対し、

- G を **Galois** 群に持つ体拡大の存在 / 非存在
- 存在するならその具体的な構成
(多項式の最小分解体として構成)
→ **Galois** 群の構成問題
- パラメタ付の多項式による G -拡大の族の構成
- 全ての G -拡大を与える多項式の構成
(**生成的多項式, generic polynomial**)

「**構成的 Galois 理論**」

一般的な理論に乗る部分もあるが、

実際には

扱う体や有限群の個性が強く影響し、

一筋縄でいかない所がある。

… 特に実例を多く扱うことで

「計算する数学」

の面白さを思い出してもらいたい。

(シラバスより)

本講義の概要・予定

- 古典的な方程式論
(3次・4次方程式の根の公式)
- Galois 理論の復習
- Galois 群の計算例
- Galois の逆問題 (構成問題) について
- Galois 群の構成の幾つかの方法の紹介
 - ★ Hilbert の既約性定理とその応用
 - ★ Noether の問題とその応用
 - ★ Galois 剛性の利用

さて、初めに …

3 次方程式・4 次方程式の一般解法 (解の公式)

って知ってますか？

→ 方程式の解法探求の歴史

→ まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう
(人間と数学の歴史を振り返る)

小学校：

- 自然数 (正の整数) の $+$ \times
- $-$ は出来ない時がある
- \div は商と余りとを求める (整除)
- 分数を用いた \div (正の有理数)
- 小数 (近似値・正の実数)

中学・高校：

- 正負の数の四則 ($+$ $-$ \times \div)
- 文字式 (多項式) の $+$ $-$ \times
- \div は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の $-$ \div \longrightarrow 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

ところで …

大学で数学を習って

新しく出来るようになったことってある？

中学・高校：

- 正負の数の四則 ($+$ $-$ \times \div)
- 文字式 (多項式) の $+$ $-$ \times
- \div は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の $-$ \div \longrightarrow 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算 (余りを求める)



Gröbner 基底

(広中-Buchberger の algorithm)

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 \longrightarrow 1 変数方程式へ (変数消去)

本講義の中で行なう計算にも不可欠!!

ここでは、

3次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
(紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ (非整数も OK)
- (正数の範囲の) 引き算は OK
- 解も正の数のみ

2次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

→ 以下は別個に扱われた。 $(a > 0, b > 0)$

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

(→ 負の数は人間にとって考え難い?!)

3次方程式の解法 (根の公式) は？

「**根の公式**」とは：

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算 (小数)

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
(但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見たいこう。

(以下次回)