離散対数問題 (Discrete Logarithm Problem)

p：素数

$g \in \mathbb{Z}$ を 1 つ取って固定
問題：x を与えたとき、

$$g^a \equiv x \pmod{p}$$ を満たす a を見出せ。

$\longrightarrow$

$G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$
$g \in G$ を 1 つ取って固定
問題：$x \in G$ を与えたとき、

$g^a = x$ を満たす a を見出せ。

群 $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ に於ける離散対数問題

離散対数問題の一般化

以前扱った離散対数問題は、

有限アーベル群 $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ に於ける

離散対数問題であると言える

実は、有限アーベル群があれば、

離散対数問題が定式化できる

問題：

G：有限アーベル群

$g \in G$ を 1 つ取って固定

このとき、$x \in G$ に対し、

$$g^{a} = x$$

を満たす a を見出せ。

離散対数問題の一般化

離散対数問題が

- 解くのは困難
- 作るのは (冪の計算は) 高速

である (暗号に使える) 有限アーベル群の例

- 有限体上の楕円曲線の有理点の群
  (楕円曲線暗号)
- 有限体上の超楕円曲線の Jacobian の有理点の群
  (超楕円曲線暗号)
- 代数体の ideal 類群

楕円曲線暗号

「有限体上の楕円曲線の有理点の成す群」
に於ける離散対数問題を用いた暗号

楕円曲線：

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

の形の方程式で定義される代数曲線
(で然るべき条件を満たすもの)

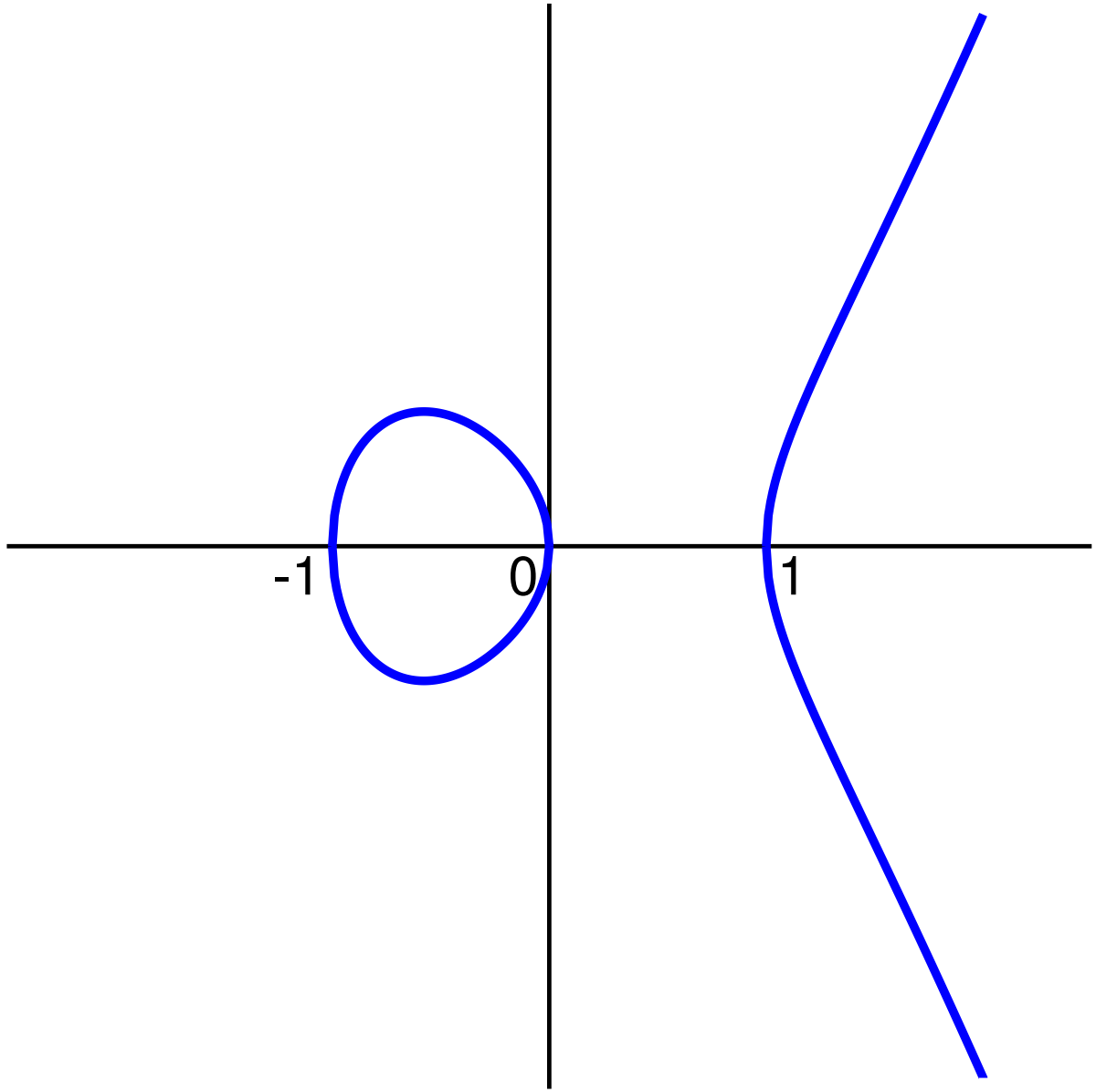
楕円曲線

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

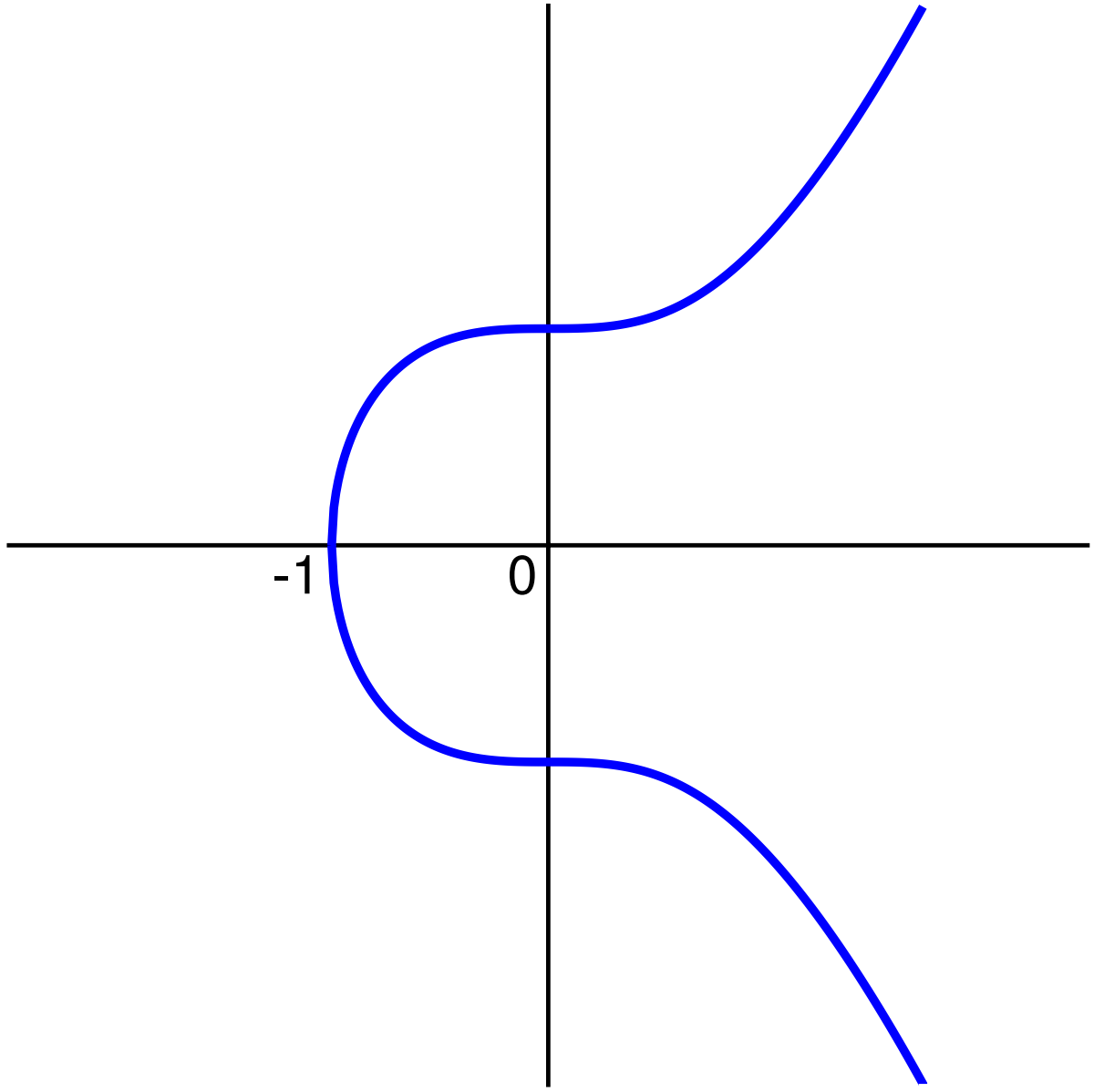
- **標数 $\neq 2$ なら y について平方完成して**
$$y^2 = x^3 + b_2x^2 + b_4x + b_6$$
の形に変数変換できる
- **さらに標数 $\neq 3$ なら x について立方完成して**
$$y^2 = x^3 + c_4x + c_6$$
の形に変数変換できる

$y^2 = (x$ **の** 3 **次式**$)$ **の形の代数曲線**

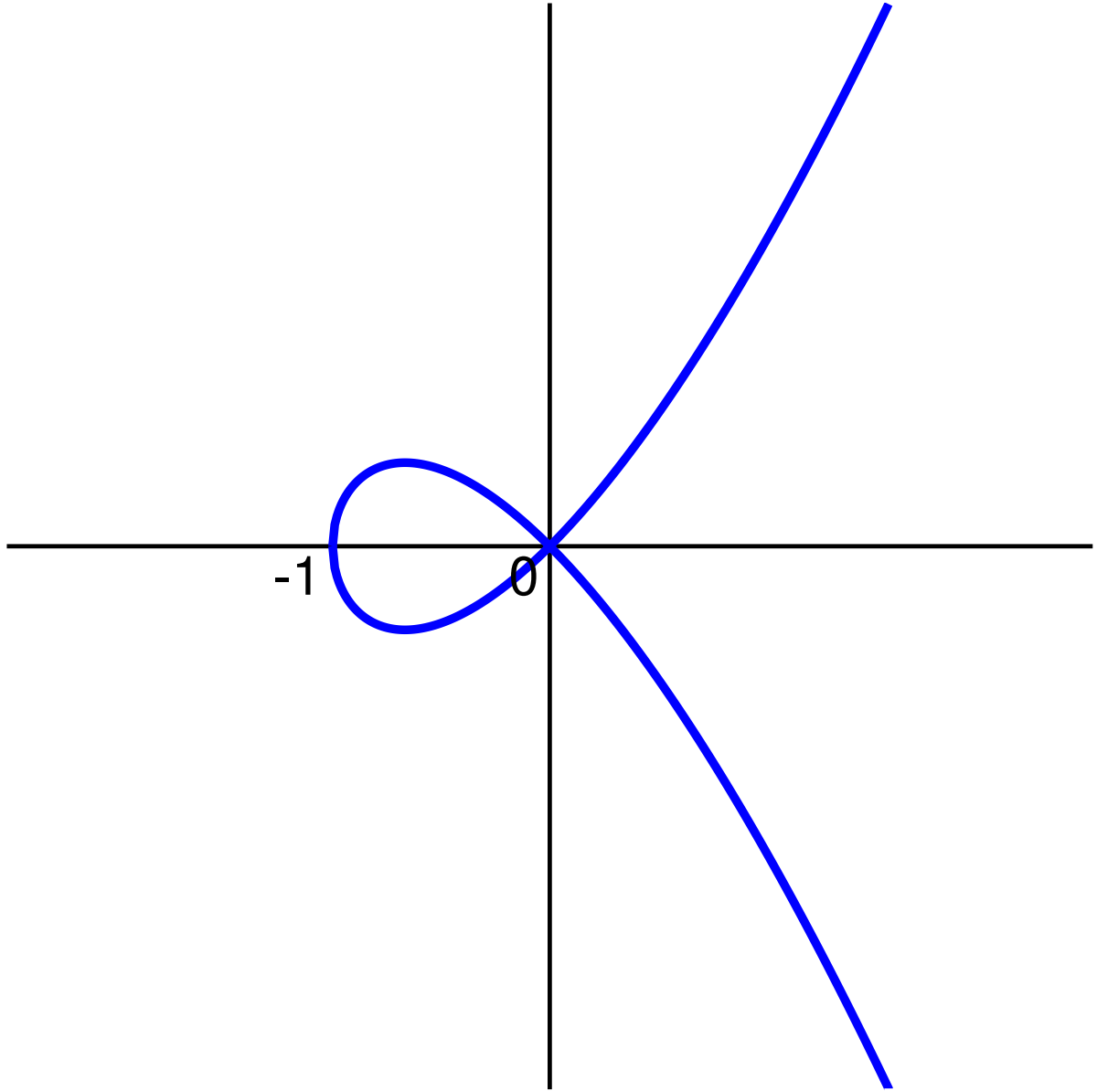
例： $y^2 = x^3 - x$



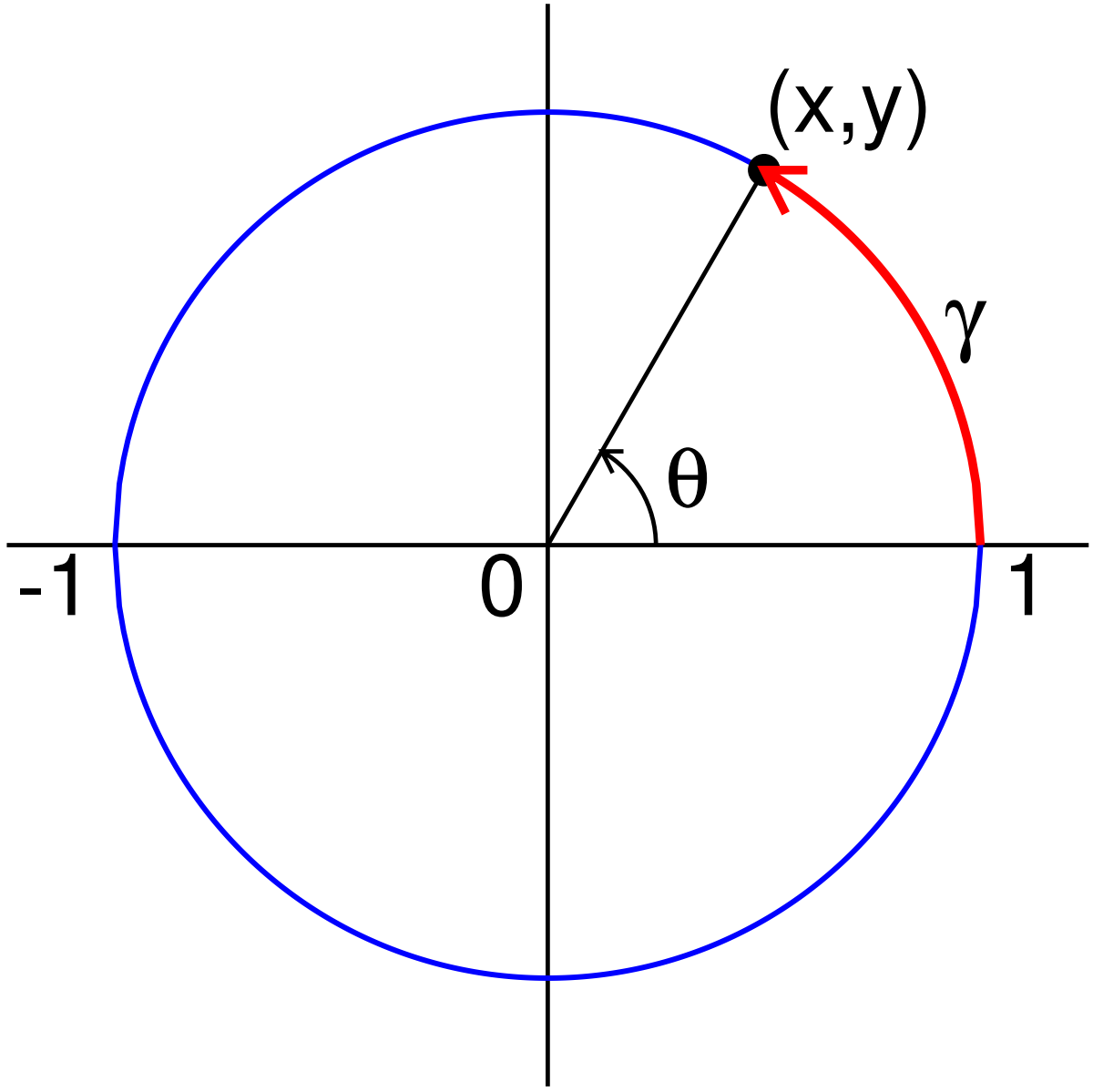
例： $y^2 = x^3 + 1$



例：$y^2 = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$：楕円曲線でない



円周の群構造：$y^2 = 1 - x^2$



射影空間

K：体
$V = K^{n+1}$：K 上の $(n+1)$ 次元数ベクトル空間
$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n), y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in V \setminus \{0\}$
に対し、

$$x \sim y \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} (\exists t \in K^\times : y = tx)$$

とすると $\sim$ は同値関係

$\mathbb{P}^n(K) := (V \setminus \{0\})/\sim$：$K$ 上の n 次元**射影空間**

$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ の属する同値類を
$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ などと書く

射影空間

$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K)$ **で、** $x_0 \neq 0$ **ならば、**

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \cdots : \frac{x_n}{x_0}\right]$$

$$K^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(K)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [1 : x_1 : \cdots : x_n]$$

$$\mathbb{P}^n(K) \setminus K^n \simeq \mathbb{P}^{n-1}(K)$$

楕円曲線の射影化

$y^2 = x^3 + ax + b$ **を** $\mathbb{P}^2(K)$ **内で考える**

$$K^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(K)$$

$$(x, y) \longmapsto [x : y : 1] = [X : Y : Z]$$

$x = \dfrac{X}{Z}, y = \dfrac{Y}{Z}$ **とおいて、**

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

楕円曲線の射影化

$$E : Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

$$E(K) = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2(K) \,|\, Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\}$$

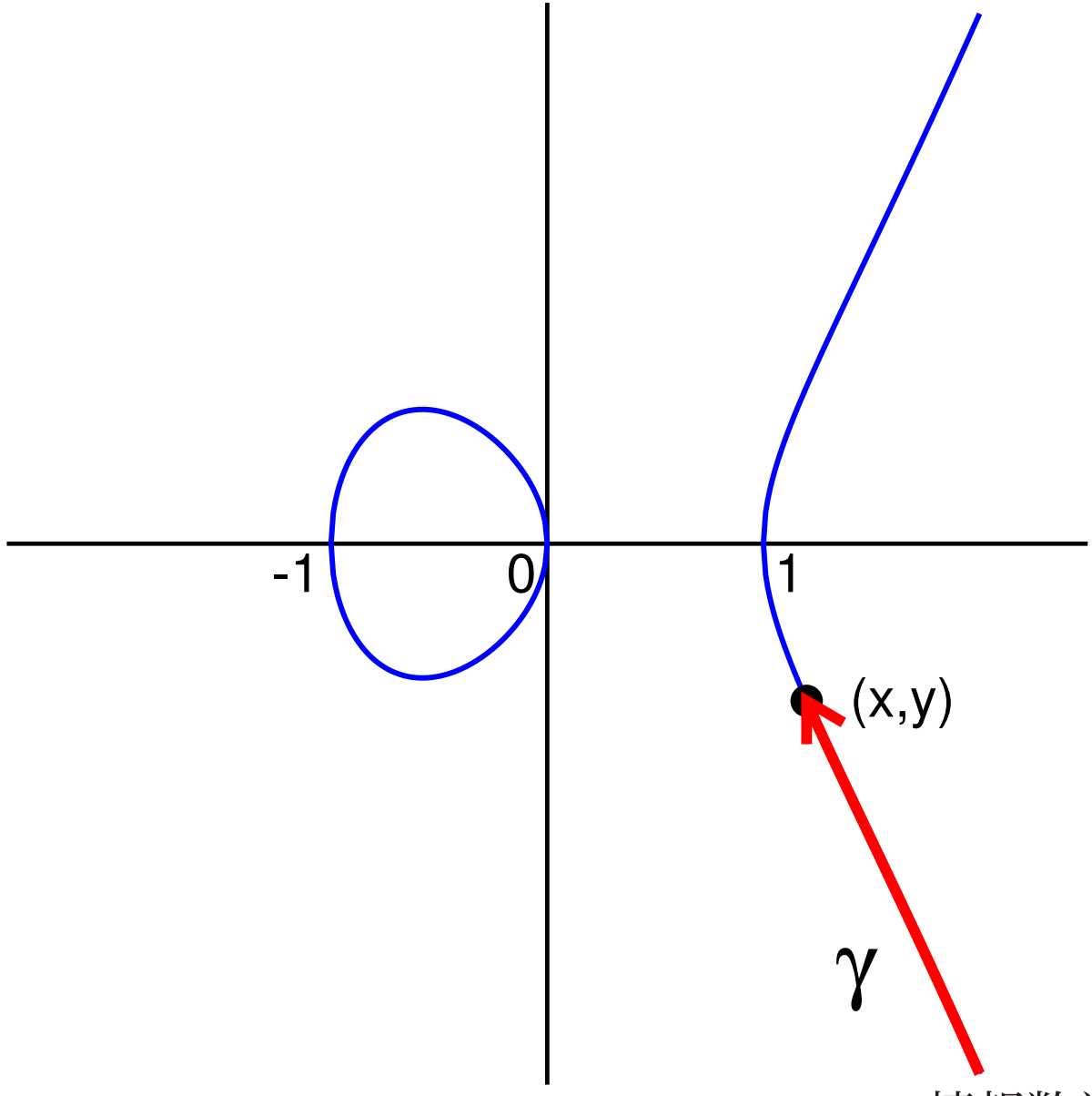
：E の K-有理点の成す集合

$$E(K) = \{(x, y) \in K^2 \,|\, y^2 = x^3 + ax + b\} \sqcup \{[0 : 1 : 0]\}$$

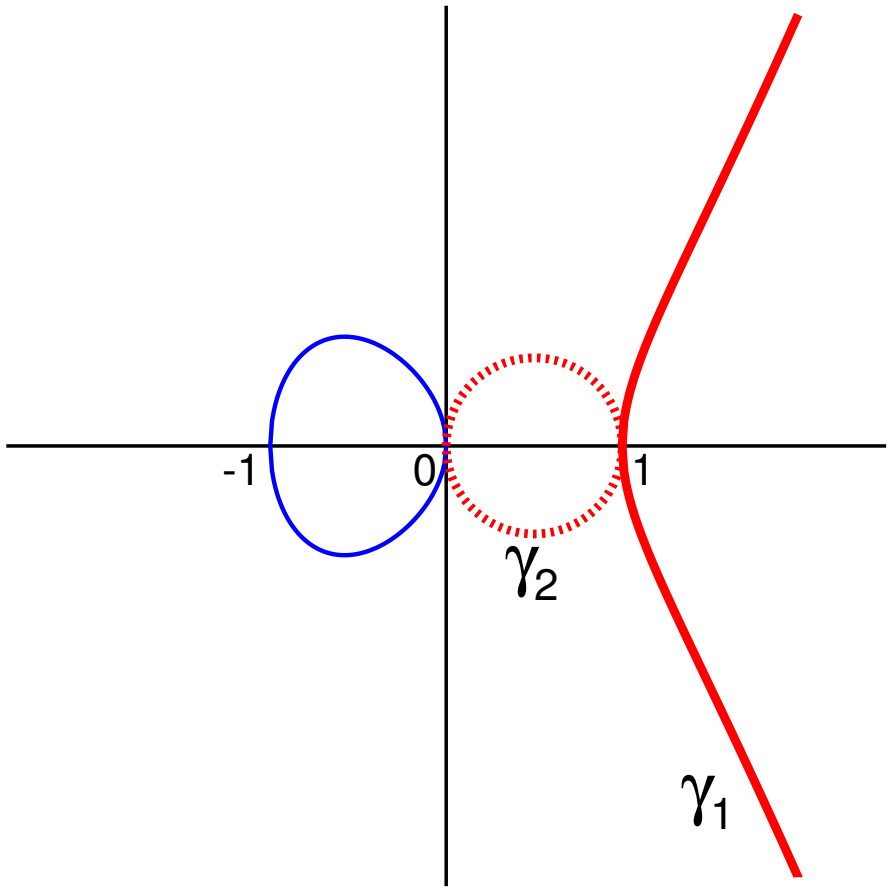
$[0 : 1 : 0]$ **：E 上にある “無限遠点”**

$(\infty, O$ などと書く$)$

楕円曲線の有理点の群構造 (解析的)



楕円曲線の有理点の群構造 (解析的)



$$\omega_1 := \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y}$$

$$\omega_2 := \int_{\gamma_2} \frac{dx}{y}$$

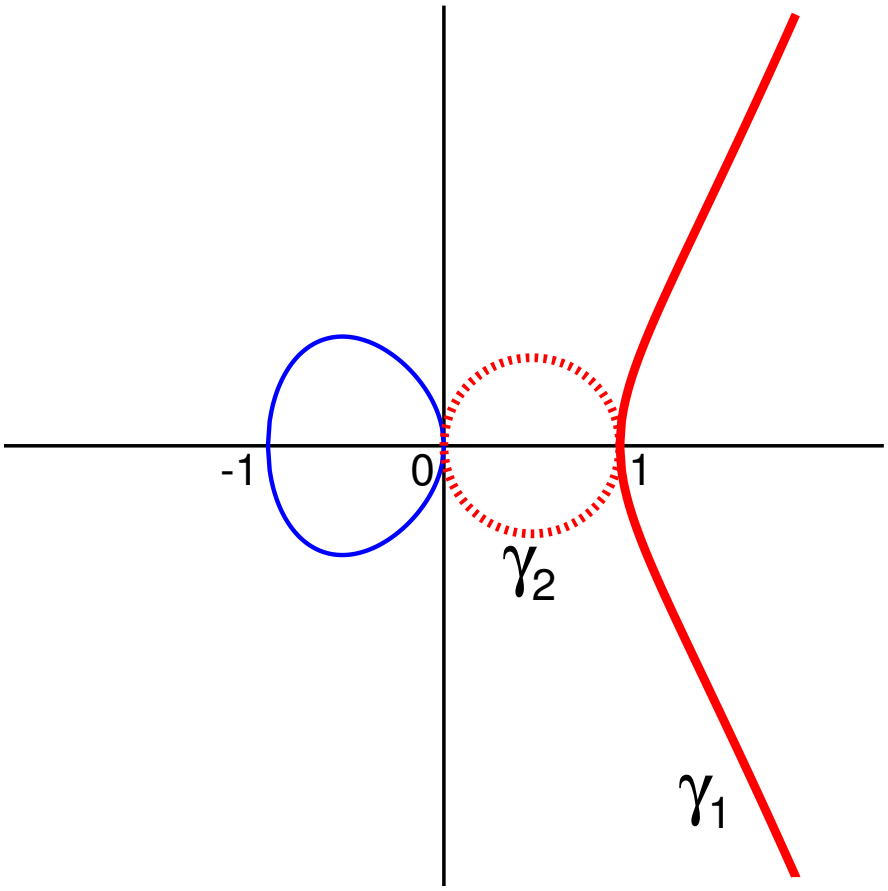
$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

$(x, y) \in E(\mathbb{C})$ **に対して、**

$z := \int_{\gamma} \frac{dx}{y}$ **は、**

$\bmod \Gamma$ **で定まる**

楕円曲線の有理点の群構造 (解析的)



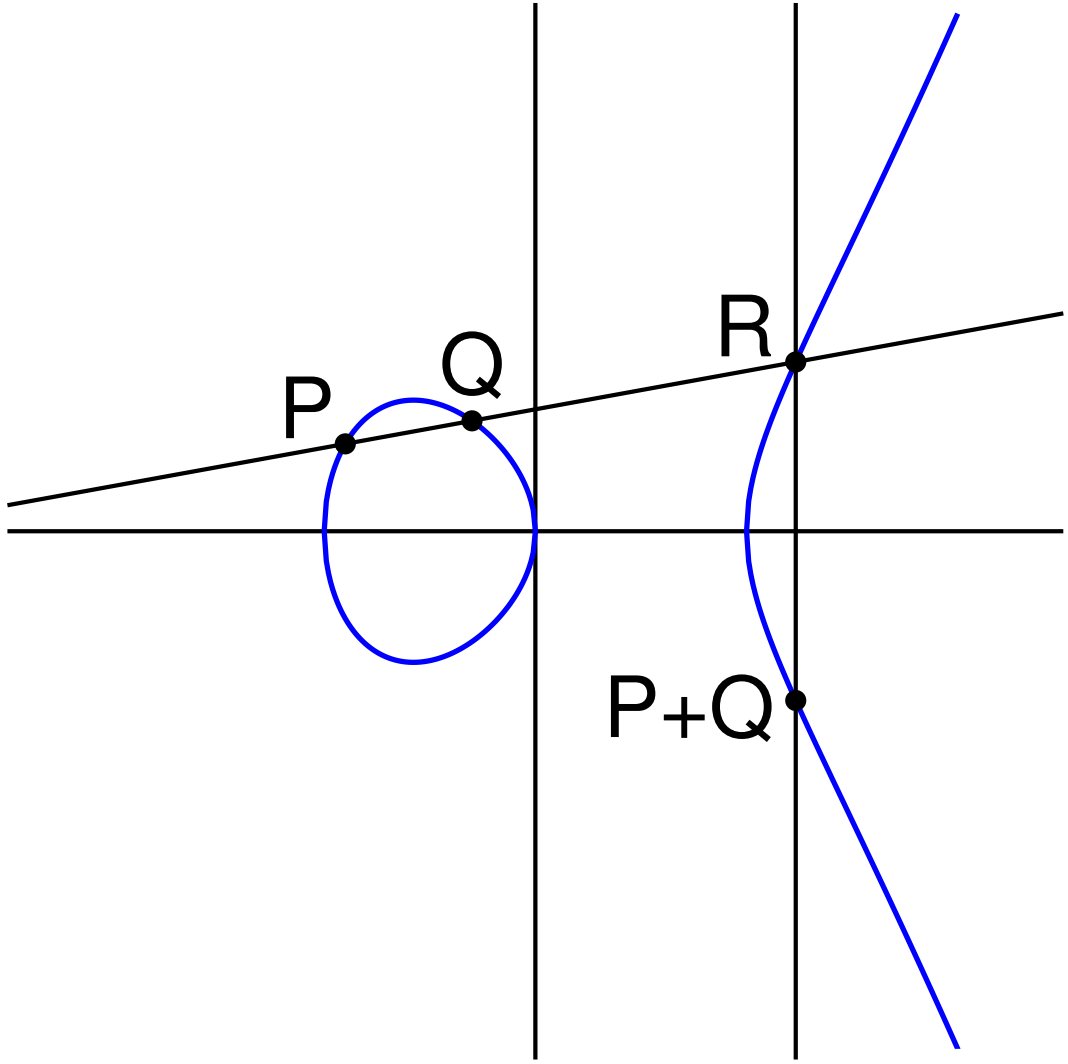
$$E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/\Gamma$$

$$(x, y) \longmapsto z = \int_\gamma \frac{dx}{y}$$

$\mathbb{C}/\Gamma$ **の**
加法群構造から
$E(\mathbb{C})$ **にも**
群構造が入る
$O = [0 : 1 : 0]$
が単位元

楕円曲線の有理点の群構造 (代数的)

$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ **が共線 (同一直線上)** $\Longleftrightarrow \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} = \mathrm{O}$



楕円曲線の有理点の群構造 (代数的)

$E(\mathbb{C})$ **の群構造は、座標** (x, y) **で代数的に書ける**

$$E : y^2 = x^3 + ax + b$$

$$\ell : y = sx + t$$

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ **で交わるとすると、**

$$s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad t = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

もう一つの交点 $R(x_3, -y_3)$ **は、**

$$x_3 = s^2 - (x_1 + x_2), \quad -y_3 = sx_3 + t$$

楕円曲線の有理点の群構造 (代数的)

$$E : y^2 = x^3 + ax + b$$

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ **に対し、**
$P + Q$ **の座標** (x_3, y_3) **は次で求められる**

$$x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - (x_1 + x_2)$$

$$y_3 = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_3 - \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

有限体上の楕円曲線

p：**素数 (ここでは簡単のため** $p \neq 2, 3$**)**

$a, b \in \mathbb{F}_p$

$E : y^2 = x^3 + ax + b$ ：$\mathbb{F}_p$ **上の楕円曲線**
$(\Delta = -4a^3 - 27b^2 \neq 0)$

$E(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) \in {\mathbb{F}_p}^2 \big| y^2 = x^3 + ax + b\} \sqcup \{O\}$
：有限アーベル群を成す
($O = [0 : 1 : 0]$**：単位元)**

有限体上の楕円曲線の有理点

Hasse の限界：

p：**素数**
E：$\mathbb{F}_p$ **上の楕円曲線　　に対し、**

$$|\#E(\mathbb{F}_p) - (p+1)| \leq 2\sqrt{p}$$

即ち、

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \leq \#E(\mathbb{F}_p) \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$$

楕円曲線暗号

p : **素数**

E : **有限体** $\mathbb{F}_p$ **上の楕円曲線**

$E(\mathbb{F}_p)$: E **の** $\mathbb{F}_p$**-有理点全体**

$\longrightarrow$ **有限アーベル群を成す**

$G = E(\mathbb{F}_p)$ **に於ける離散対数問題を用いた暗号**

$\cdots$ **楕円曲線暗号**

楕円曲線の離散対数問題 (ECDLP)

p : **素数**

E : **有限体** $\mathbb{F}_p$ **上の楕円曲線**

$E(\mathbb{F}_p)$: E **の** $\mathbb{F}_p$**-有理点全体の成す有限アーベル群**

$P \in E(\mathbb{F}_p)$ **を一つ取って固定**

$n \in \mathbb{Z}$ **に対し、**$nP \in E(\mathbb{F}_p)$ **は充分高速に計算できる**

問題：
$Q \in E(\mathbb{F}_p)$ **に対し、**$Q = nP$ **となる** $n \in \mathbb{Z}$ **を見出せ**

楕円曲線を用いた Diffie-Hellman 鍵共有

楕円離散対数問題 (ECDLP) の困難さを利用して、
公開通信路で秘密裡に鍵共有を行なう方式

p : **素数,** E : $\mathbb{F}_p$ **上の楕円曲線 (公開)**

E **の** $\mathbb{F}_p$**-有理点の一つ** $Q \in E(\mathbb{F}_p)$ **を**
公開通信路で秘密裡に共有したい

楕円曲線を用いた Diffie-Hellman 鍵共有

p : 素数, E : $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 (公開)

E の $\mathbb{F}_p$-有理点の一つ $P \in E(\mathbb{F}_p)$ を 1 つ取る (公開)
(位数が充分大きいように選んでおく)

- A, B 両者が ランダム かつ 秘密裡に
  それぞれ a, b を選ぶ
- A は aP を計算し、B に送る
  B は bP を計算し、A に送る
- A は $a(bP)$ を計算、B は $b(aP)$ を計算

$\longrightarrow Q := a(bP) = b(aP)$ を秘密裡に共有出来た !!

楕円曲線暗号の利点

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は素数 p で決まってしまう
  $\longrightarrow$ 群を変えるには p を大きくする必要あり
- 一方、1 つの素数 p に対して、
  楕円曲線 E を変えれば $E(\mathbb{F}_p)$ は色々出来る
  $\longrightarrow$ p を大きくしなくても適切なものを選べる
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ に関する離散対数問題より、
  $E(\mathbb{F}_p)$ に関する離散対数問題の方が難しいようだ
- 現状で同程度の安全性を求めると、
  楕円曲線暗号の方が小さな p で済む (効率的)

このように、

現代の情報化社会では、

深い数理現象に基づいた様々な数理技術によって、

安全性・確実性・効率性が支えられている

(ので、数学にしっかり取り組みましょう)

おしまい