有限オートマトン (11/25 配布)

(決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- Q : 有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ : 有限集合 $\cdots$ 入力文字の集合 (“alphabet”)
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$: 遷移関数
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

(決定性) 有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ を受理 (accept) する

$\Longleftrightarrow \exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- Q : 有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ : 有限集合 $\cdots$ alphabet, $\quad \Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$: 遷移関数 $\quad\cdots$ 可能な遷移先全体の集合
  ($\mathcal{P}(Q)$ は Q の冪集合)
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が語 $w \in \Sigma^*$ を受理する

$\Longleftrightarrow \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon, \exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $w = a_1 a_2 \cdots a_n$
- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

決定性有限オートマトンと非決定性有限オートマトンとの同等性

与えられた非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ に対し、M が認識する言語 $L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{M} := (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$ が次で構成できる :

まず、各状態 $q \in Q$ に対し、$E(q) \subset Q$ を次で定める :

$$E_0(q) := \{q\}, \quad E_{i+1}(q) := \bigcup_{r \in E_i(q)} \delta(r, \varepsilon), \quad E(q) := \bigcup_{i \geq 0} E_i(q)$$

($E(q)$ は状態 q から入力を何も読まずに遷移できる状態全体)

- $\widetilde{Q} := \mathcal{P}(Q)$: 現在あり得る状態全体の集合
- $\widetilde{\delta} : \widetilde{Q} \times \Sigma \longrightarrow \widetilde{Q}$ $\quad$: $\widetilde{q}$ の何処かから入力 x で遷移できる状態全体

$$(\widetilde{q}, x) \longmapsto \widetilde{\delta}(\widetilde{q}, x) := \bigcup_{q \in \widetilde{q}} \bigcup_{r \in \delta(q, x)} E(r)$$

- $\widetilde{s} := E(s)$
- $\widetilde{F} := \{\widetilde{q} \in \widetilde{Q} \,|\, \widetilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$: あり得る状態のどれかが受理状態