

期末試験のお知らせ

1月27日(金) 13:30 ~ 14:30
(60分試験)

1-101 教室 (ここじゃない)

- 最終回(今日)の講義内容まで
- 学生証必携

レポート提出について

- 期日：2月6日(月)20時頃まで
- 内容：
配布プリントのレポート問題の例のような内容
及び授業に関連する内容で、
授業内容の理解または発展的な取組みを
アピールできるようなもの
- 提出方法：
 - ★ 4-574 室扉のレポートポスト
 - ★ 電子メール

本講義最後の話題は、

計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

Church-Turing の提唱 (再掲)

「全てのアルゴリズム (計算手順) は、
チューリングマシンで実装できる」

(アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ)

… 「アルゴリズム」の定式化

計算量 (complexity)

- **時間計算量** : 計算に掛かるステップ数
(TM での計算の遷移の回数)
- **空間計算量** : 計算に必要なメモリ量
(TM での計算で使うテープの区画数)

通常は、決まった桁数の四則演算 1 回を
1 ステップと数えることが多い

入力データ長 n に対する
増加のオーダー (Landau の O -記号) で表す

計算量 (complexity)

問題を解くアルゴリズムによって決まる

… アルゴリズムの計算量

→ アルゴリズムの効率 の評価

問題の計算量：

その問題を解くアルゴリズムの計算量の下限

最も効率良く解くと、どれ位で解けるか

= どうしてもどれ位必要か

= どれ位難しい問題か

→ 問題の難しさ の評価

重要な難しさのクラス

多項式時間 P $\dots \exists k : O(n^k)$

- “事実上計算可能” な難しさ
- 計算モデルの変更に関して頑健
(複数テープ TM などに変更しても不変)

「しらみつぶし」が入ると大体 $O(2^n)$ 程度以上
(指数時間 EXP $\dots \exists k : O(2^{n^k})$)

“事実上計算不可能”

非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

非決定性多項式時間 (NP):

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例: 素因数分解は NP

… 素因数を知っていれば割算するだけ

非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ
(賞金 \$1M)

多項式時間帰着可能性

問題 **B** が問題 **A** に多項式時間帰着可能

$\iff \exists f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* :$

- f : 多項式時間で計算可能
(多項式時間で計算する TM が存在)
- $w \in B \iff f(w) \in A$

- 問題 **B** が問題 **A** に多項式時間帰着可能のとき、
 $A \in P \implies B \in P$

NP 完全・NP 困難

- 問題 A が **NP 困難 (NP-hard)**
 \iff 全ての NP 問題 B が
問題 A に多項式時間帰着可能
- 問題 A が **NP 完全 (NP-complete)**
 \iff 問題 A が NP かつ NP 困難

或る NP 完全な問題 A が $P \iff P = NP$

充足可能性問題 (SAT)

NOT, OR, AND からなる論理式

$f(A_1, \dots, A_n)$ に対し、
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ となる変数 A_i の真理値の組
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$
が存在するか？

定理 (Cook-Levin)

SAT は NP 完全

論理積標準形

NOT, OR, AND からなる全ての論理式は
次の形で表せる :

$$f(A_1, \dots, A_n) = (X_{11} \vee \dots \vee X_{1t_1}) \\ \wedge \dots \\ \wedge (X_{s1} \vee \dots \vee X_{st_s})$$

(各 X_{ij} は A_k または $\neg A_k$)

... 論理積標準形・連言標準形
(conjunctive normal form, CNF)

特に、 $\forall i : t_i = 3$ となる論理式 ... 3-CNF

3-充足可能性問題 (3-SAT)

3-CNF $f(A_1, \dots, A_n)$ に対し、
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ となる変数 A_i の真理値の組
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$
が存在するか？

定理

- **SAT** は **3-SAT** に多項式時間帰着可能
- 従って、**3-SAT** も **NP 完全**

他にも沢山の **NP 完全問題**が知られている

例えば、次のパズルの解の存在判定は全て **NP 完全**

- 数独
 - カックロ
 - ののぐらむ
 - スリザーリンク
 - ナンバーリンク
 - ぬりかべ
 - 美術館
 - ましゅ
 - 天体ショー
 - フィルオミノ
- など