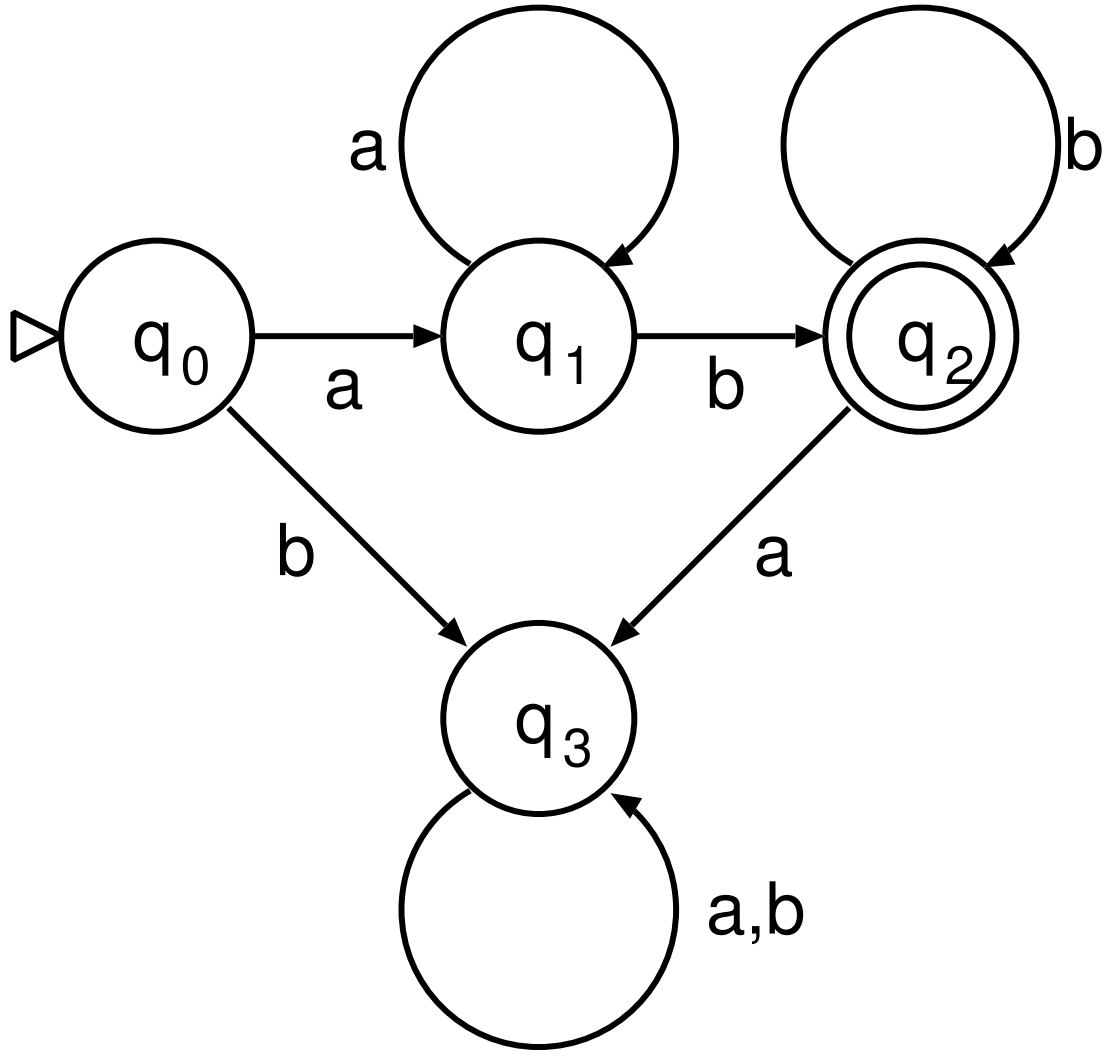
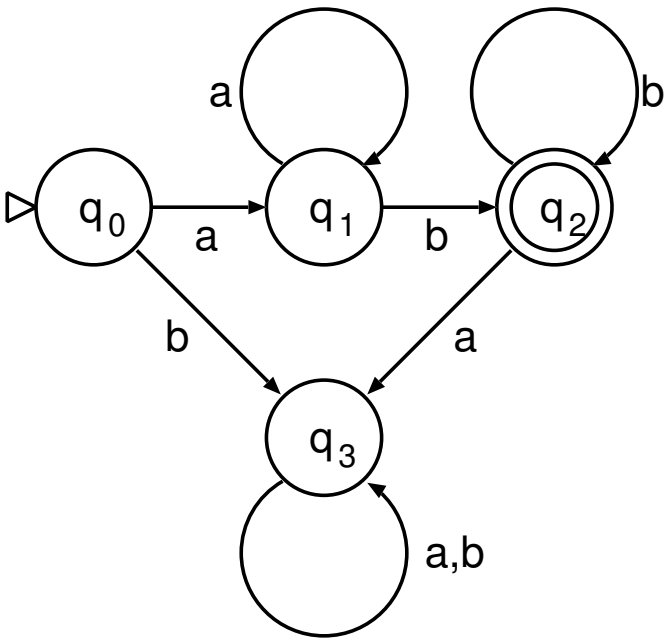
代表的な計算モデル

- **有限オートマトン (有限状態機械)**
- **プッシュダウンオートマトン**
- **チューリングマシン**

有限オートマトンの例 (状態遷移図による表示)



有限オートマトンの動作



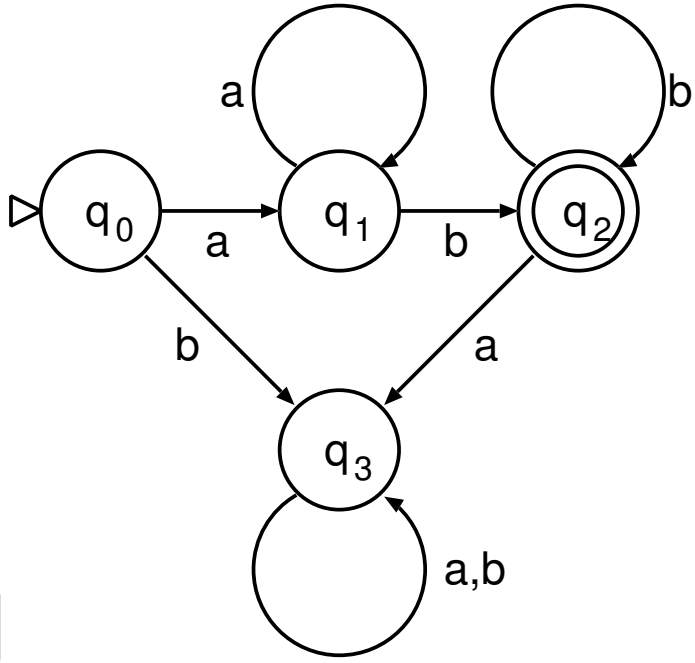
- 有限個の内部状態を持つ
- 有限個の文字から成る有限長の文字列を入力として受けて動作する
- 初期状態が定められている
- 入力を１文字読み、その文字と今の内部状態とに従って、次の内部状態に移る
- 入力を読み終わったときの内部状態によって受理／拒否が決まる

有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q : **有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ : **有限集合** $\cdots$ **入力文字の集合 :“alphabet”**
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: **遷移関数**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**



先の例では、

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$:

	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_3	q_2	q_2	q_3

- $s = q_0 \in Q$
- $F = \{q_2\} \subset Q$

語・言語

Σ : 入力文字の有限集合 $\cdots$ alphabet

入力は Σ の元の有限列 (**語**, **word**)

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n \ (a_i \in \Sigma)$$

その全体 Σ^*

$$\Sigma^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n \qquad (\Sigma^0 = \{\varepsilon\} : \text{空列})$$

言語 (language) : Σ^* の部分集合

言語 $A \subset \Sigma^*$ に属する語 $w \in A$

$\cdots$ 言語 A に於いて “文法に適っている”

有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **が**
語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ **を受理 (accept) する**

$$\Updownarrow$$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

$L(M)$: M **が受理する語の全体** $\subset \Sigma^*$
$\cdots$ M **が認識 (recognize) する言語**

M **は言語** $L(M)$ **の "文法" で、**
M **が受理する語は "文法に適っている"**

演習問題

$\Sigma = \{a, b\}$ とする。

次の言語を認識する有限オートマトンを構成し、状態遷移図で表せ

(1) $A = \{a^{2n}b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$
(a が偶数個 (0 個も可) 続いた後に、b が奇数個続く)

(2) $B = \{vabbaaw \mid v, w \in \Sigma^*\}$
(部分列として $abbaa$ を含む)

演習問題

ちょっとしたコツ (tips) :

「後に続く文字列が何だったら受理か」

が全く同じ状態は一つの状態にまとめられる。

これが違う状態はまとめられない。
(違う状態として用意する必要あり)

有限オートマトンでの計算可能性問題

- **言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、**
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- **有限オートマトンによって**
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

語の演算

語 $v = a_1 \cdots a_k, w = b_1 \cdots b_l \in \Sigma^*$ **に対し**

$$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

：連結・連接 (concatnation)

連接演算により Σ^* **は単位的自由半群を成す**

$S = (S, \cdot)$ **：半群 (semigroup)**

$\Updownarrow$

$\cdot : S \times S \longrightarrow S$ **：二項演算で結合律を満たす**

語の演算

語 $v = a_1 \cdots a_k, w = b_1 \cdots b_l \in \Sigma^*$ **に対し**

$$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

：連結・連接 (concatnation)

連接演算により Σ^* **は単位的自由半群を成す**

$$S = (S, \cdot) \text{ : 半群 (semigroup)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cdot : S \times S \longrightarrow S \text{ : 二項演算で結合律を満たす}$$

正規演算

言語 $A, B \subset \Sigma^*$ **に対し、**

- $A \cup B := \{w | w \in A$ **または** $w \in B\}$
  : 和集合演算
- $AB = A \circ B := \{vw | v \in A, w \in B\}$
  : 連結 (連接) 演算
- $A^* := \{w_1 w_2 \cdots w_n | n \geq 0, w_i \in A\}$
  : star 演算

(言語全体の集合 $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ **上の演算)**

正規表現 (regular representation)

- **空集合記号 $\emptyset$ は正規表現**
- **空列記号 ε は正規表現**
- **各 alphabet $a \in \Sigma$ は正規表現**
- **正規表現 R, S に対し**
  $(R \cup S)$ は正規表現 ($(R|S)$ とも書く)
- **正規表現 R, S に対し**
  $(R \circ S)$ は正規表現 ((RS) とも書く)
- **正規表現 R に対し R^* は正規表現**
- **以上のものだけが正規表現**

$\cdots$ 帰納的導出による定義

正規表現 (regular representation)

- **空集合記号 $\emptyset$ は正規表現**
- **空列記号 ε は正規表現**
- **各 alphabet $a \in \Sigma$ は正規表現**
- **正規表現 R, S に対し**
  $(R \cup S)$ は正規表現 ($(R|S)$ とも書く)
- **正規表現 R, S に対し**
  $(R \circ S)$ は正規表現 ((RS) とも書く)
- **正規表現 R に対し R^* は正規表現**
- **以上のものだけが正規表現**

$\cdots$ 帰納的導出による定義

正規言語 (regular language)

正規表現 R に対し、言語 $L(R)$ を次で定める：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$ **($a \in \Sigma$)**
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

正規表現で表される言語 $\cdots$ 正規言語

問：

前回の演習問題で与えられた言語

(1) $A = \{a^{2n}b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$

(2) $B = \{vabbaaaw | v, w \in \Sigma^*\}$

を正規表現で表せ

(定める正規言語が上の A, B であるような正規表現を与えよ)

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

… 非決定性有限オートマトン
(Non-deterministic finite automaton)

定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

. . . 非決定性有限オートマトン
(Non-deterministic finite automaton)

「非決定性」とは　　・・・ あてずっぽう有り

状態の遷移先を一意に決めない
(幾つかあって分岐していく)

⟶ どれかが受理すれば OK!!

- **手分けをして誰かが受理出来れば良い**
- **どの道を辿れば良いか知っていて、**
  受理が検証出来れば良い

と考えることも出来る

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q : **有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ : **有限集合** $\cdots$ **alphabet,** $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$: **遷移関数**
  $\cdots$ **可能な遷移先全体の集合を与える**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ を受理する

$$\Updownarrow$$

$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \cdots a_n$
$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q :$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

$L(M)$ **： M が受理する語の全体**

$\cdots$ **M が認識する言語**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

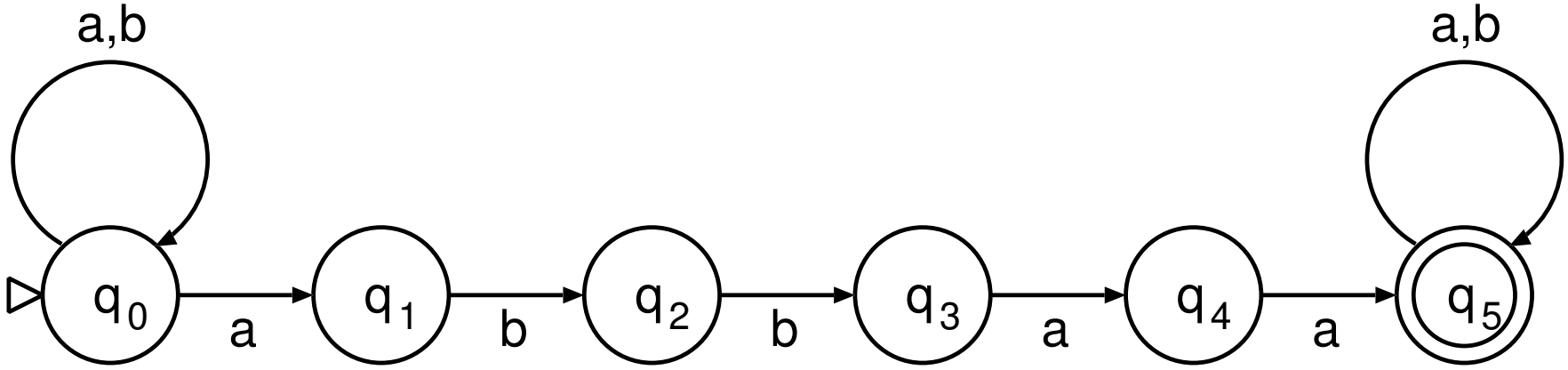
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon)$ **とは、**
  「入力を読まずに
  状態 r_{i-1} **から状態** r_i **に移って良い」**
  ということ

- $\delta(r_{i-1}, a_i) = \emptyset$ **(矢印が出ていない)**
  ということもある

  $\longrightarrow$ **受理されない分岐の**
  行き止まりに入ってしまった

  $\longrightarrow$ **他の分岐が生きていれば問題無し**

非決定性有限オートマトンの例
(状態遷移図による表示)



定理：

L が或る (決定性) 有限オートマトンで認識される

$\Updownarrow$

L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

非決定性有限オートマトン M に対し、

$\mathrm{L}(\mathrm{M})$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{\mathrm{M}}$ が構成できる

定理：

L **が或る (決定性) 有限オートマトンで認識される**

$\Updownarrow$

L **が或る非決定性有限オートマトンで認識される**

非決定性有限オートマトン M **に対し、**

$L(M)$ **を認識する決定性有限オートマトン** $\widetilde{M}$ **が構成できる**