

5. 一変数関数の積分

5-1. 定積分の定義. 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で有界であるとする.

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$: 区間 $[a, b]$ の分割
 $I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$)
 小区間の最大幅 $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く.
- $m_i := \inf_{x \in I_i} f(x), M_i := \sup_{x \in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), S_\Delta := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

- $s := \sup_{\Delta} s_\Delta, S := \inf_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a, b]$ での下積分・上積分

- f が $[a, b]$ で積分可能 $\iff s = S$

この時、 $s = S =: \int_a^b f(x)dx$: f の $[a, b]$ での定積分

- (Darboux の定理) $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$: 分割の列で、 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ とする。この時、
 $s_{\Delta_n} \rightarrow s, S_{\Delta_n} \rightarrow S$ ($n \rightarrow \infty$)。

- $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$: 各小区間から代表点を1つずつ選んだもの ($\xi_i \in I_i$)

$$I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) : \text{Riemann 和}$$

- f が $[a, b]$ で積分可能 $\iff \exists \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ 。この時、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)dx$

5-2. 積分の基本性質.

- 区間に関する加法性 : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

- 線型性: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

- 単調性 : $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

5-3. 不定積分. 定積分関数 $\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\int f(x)dx$ と書く。... 不定積分

5-4. 微分積分学の基本定理. f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

即ち、不定積分 = 原始関数 (微分すると f になる関数)。... 微分法と積分法との邂逅!!
 又、 F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \left(= \left[F(x) \right]_a^b \text{ と書く} \right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
 足立恒雄「類体論へ至る道」より

5-5. 広義積分 (変格積分). 積分区間又は非積分関数が有界でない場合.

下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f : 区間 $[a, b)$ (resp. $(a, b]$) の上端 b (resp. 下端 a) の近くで有界でない場合

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

- f : 区間 $[a, +\infty)$ (resp. $(-\infty, b]$) で定義されている場合

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^b f(x)dx$$

- f : 区間 $[a, b]$ の内点 c の近くで有界でない場合

積分区間を $[a, c), (c, b]$ に分けて、それぞれ考えよ。

- f : 積分区間の両端 a, b で広義積分の場合 (a, b の近くで有界でないか、 $a, b = \pm\infty$) 適当な点 c で積分区間を $(a, c], [c, b)$ に分けて、それぞれ考えよ。

- 典型的な例:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$

- 判定法 (簡単な場合)

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

5-6. Γ 関数・B 関数.

- $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$: Γ 関数 (広義積分は $s > 0$ で収束)

- $B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$: B 関数 (広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束)

$$\bullet \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

5-7. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し $c > 0$)

$$\bullet \int \frac{1}{(x-a)^n} dx : \begin{cases} n=1 \text{ なら } \log|x-a| \\ n \geq 2 \text{ なら } -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \end{cases}$$

$$\bullet \int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n} dx : \text{変数変換 } \sqrt{c}t = x+b, \sqrt{c}dt = dx \text{ で } \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \text{ に帰着}$$

$$\rightarrow \begin{cases} n=1 \text{ なら } \arctan t \\ n \geq 2 \text{ なら 部分積分で } n-1 \text{ の場合に帰着} \end{cases}$$

$$\bullet \int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n} dx : \text{変数変換 } t = (x+b)^2+c, dt = 2(x+b)dx \text{ で } \int \frac{dt}{t^n} \text{ に帰着}$$

5-8. 冪根 (平方根など) を含む積分. 不定積分 (原始関数) が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分

→ 変数変換 $y^n = ax+b, ny^{n-1}dy = adx$ で有理関数の積分に帰着

- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$ ($\sqrt{1}$ 次式 2 種類) の有理式の積分

→ 変数変換 $y^2 = ax+b, 2ydy = adx$ で $\sqrt{2}$ 次式の有理関数の積分に帰着

- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分

→ $y^2 = ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着

- $\sqrt{3}$ 次以上の多項式の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。

($\sqrt{3}$ 次式又は 4 次式 の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。)

5-9. 三角関数の有理関数の積分. $t = \tan \frac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$