2011年度春期　数学B(微分積分)　期末試験 (担当:角皆)

実施: 2011年7月18日 (月), 13:30 〜 15:00, 11–519 教室

1. 一般的な諸注意

- 学生証を机上に提示すること。学生証を忘れた者は、学務課窓口に行って「臨時学生証 (定期試験用)」を作成してもらうこと。
- 上の場合を含め、入室は試験開始後 20 分まで認める。退室は試験開始後 30 分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷 (白色かそれに近いもので無地) ・時計 (電卓機能等のないもの) のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。電卓・計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞄の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始の指示があるまでは、本冊子を開かないこと。
- 試験開始後、まず初めに学生番号・名前を答案用紙に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 答案用紙の 2 枚目以降が必要な場合は挙手して申し出ること。2 枚目以降にも学生番号・名前の記入を忘れずに。また、全ての用紙に何枚目中の何枚目かを記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。

2. 問題について

- 解答は答案用紙に記述すること。問題番号の順に解答する必要はないが、どこがどの問題か明確に判るようにすること。但し、
    - ⋆ 問 1 は直観問題であり、○×のみを**解答欄**に記入すればよい。
    - ⋆ 問 2 は適切な数値・数式・○×を**解答欄**に記入すればよい。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。数式も文であり、答案は文章である。数式のみで充分な場合もあるので、殊更に丁寧過ぎる必要はないが、数式の散漫な羅列ではいけない。必要に応じて、「とする」「となればよい」「したがって」などの言葉を適切に用いて、意図・論理の伝わる答案を心掛けること。
- 問 6 以降の問題は力試し的な問題。それも入れると問題は少し多めに作ってある。問 9 までで 140 点相当程度あるので、適切に選んで解答すること。

3. 今後の数学関係科目について

秋学期には理工共通科目 II 群の選択科目として次の科目が開講される。

- 「ベクトル解析の基礎」
    - ⋆ 多変数関数の微分法 (全微分・偏微分・極値問題)
    - ⋆ 多変数関数の積分法 (重積分・面積・体積)
    - ⋆ ベクトル値関数の微分積分 (所謂「ベクトル解析」)
- 「微分方程式の基礎」
    - ⋆ 典型的な微分方程式の理論と解法
    - ⋆ 重要な例の一つとして連立線型微分方程式と固有値問題

多変数関数・ベクトル値関数・連立方程式などの取扱いに於いては、線型代数 (行列・ベクトル) の言葉を用いて、一変数の場合と同様な記述が出来る場合が多い。受講予定者には微積分のみならず、「数学 A(線型代数)」で学習した行列・ベクトルの復習を奨める。

尚、理工学部生も履修できる全学共通科目として次の科目も開講される。

- 「現代数学 B」
    - ⋆ 実数の基礎付け・ε-δ 論法
    - ⋆ 数直線やユークリッド空間の距離・収束・極限など

2011年度春期　数学B(微分積分)　期末試験 (担当:角皆)

問1. 次の広義積分は収束するか。収束するなら○、しないなら×を、解答欄に記せ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^{2011}}{e^x}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+2011\sqrt{x}+718}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x-\sin x}dx$

問2. 閉区間 $I=[0,2]$ 上の関数 f を次で定める：

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1)\\ 5 & (x=1)\\ 3 & (1<x\le 2).\end{cases}$$

$0<\varepsilon<1$ なる実数 ε に対し、$x_1=1-\varepsilon,\ x_2=1+\varepsilon$ とし、区間 I の分割

$$\Delta_\varepsilon : 0=x_0<x_1<x_2<x_3=2$$

を考える。分割された各小区間 $I_j=[x_{j-1},x_j]=\{x|x_{j-1}\le x\le x_j\}$ での関数値 $f(x)$ の下限・上限をそれぞれ $m_j=\inf\limits_{x\in I_j} f(x), M_j=\sup\limits_{x\in I_j} f(x)$ とし、

$$s_{\Delta_\varepsilon}=\sum_{j=1}^{3} m_j(x_j-x_{j-1}),\qquad S_{\Delta_\varepsilon}=\sum_{j=1}^{3} M_j(x_j-x_{j-1})$$

とする。

(1) 各小区間 I_j について m_j, M_j の値を記せ。
(2) この分割 Δ_ε について、$s_{\Delta_\varepsilon}, S_{\Delta_\varepsilon}$ の値を記せ。
(3) $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} s_{\Delta_\varepsilon}$ 及び $\inf\limits_{0<\varepsilon<1} S_{\Delta_\varepsilon}$ の値を記せ。
(4) 関数 f は区間 I で積分可能であるか。積分可能なら○、積分可能でないなら×を、解答欄に記せ。

問3. 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-30}{x^2(x^2-2x+10)}$ の不定積分を計算したい。

(1) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。
(2) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

問4. $\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ の逆関数 $\operatorname{arctanh} x$ の Taylor 展開を次の手順で求めよ。

(1) $y=\tanh x$ の満たす微分方程式 (y と y' との関係式) を求める。
(2) $x=\operatorname{arctanh} y$ を積分で表す。
(3) 被積分関数を Taylor 展開して項別積分する。

問5. $I_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ $(n=0,1,\ldots)$ とおく。

(1) I_0, I_1 を求めよ。
(2) I_n の漸化式 (I_n と I_{n-1} との関係式) を求めよ。(ヒント: 部分積分)
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

2011年度春期　数学B(微分積分)　期末試験(担当:角皆)

問6. 関数 f が $x=a$ で連続であることの定義は、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であること(即ち、任意の正の数 ε に対して、或る正の数 δ が存在して、$0<|h|<\delta \Rightarrow |f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$ となること)である。

関数 $f(x)=x^2$ が、任意の実数 a に対して $x=a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon>0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $0<|h|<\delta$ に対し、
> $\cdots$
> $|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$ を示す
> $\cdots$
> 従って、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x=a$ で連続。

問7. 2つの関数 f_1, f_2 が共に $x=a$ で連続であるとき、$g(x) := f_1(x)+f_2(x)$ で定義される関数 g (関数 f_1, f_2 の和といい、通常 f_1+f_2 と書く) も $x=a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon>0$ を取る。
> f_1 は $x=a$ で連続であるから、
> $$\exists\delta_1>0 : 0<|h|<\delta_1 \Rightarrow |f_1(a+h)-f_1(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$
> f_2 は $x=a$ で連続であるから、同様に、
> $\boxed{f_1 \text{ と同様}}$
> $\delta := \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $0<|h|<\delta$ に対し、
> $\cdots$
> $|g(a+h)-g(a)|<\varepsilon$ を示す
> $\cdots$
> 従って、$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ となり、g は $x=a$ で連続。

問8. 閉区間 $I=[0,1]$ 上の関数 f を次で定める：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=\dfrac{1}{n}\ (n:\text{正整数})\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

f の I における下積分は 0 であるが、実は上積分も 0 であって、(不連続点が無限個あるにも関わらず) f は I で積分可能である。このことを示せ。(ヒント: 任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対して、“上からの見積もり” S_{Δ_ε} が ε 以下となるような分割 Δ_ε を構成せよ。)

問9. $y=\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ について、定積分

$$I(a) = \int_0^a \arctan x dx$$

$(a>0)$ を次の2通りで求めてみよう。

(1) $\arctan x = (x)' \arctan x$ と見て部分積分して求めよ。

(2) 長方形領域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le \arctan a\}$ は $y=\arctan x$ のグラフによって2つの領域に分かれる。この各領域の面積を考えることによって求めよ。

以上

$\textsc{Taylor}$ 展開の例

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$\textsc{Taylor}$ 展開の剰余項

f が N 階微分可能の時、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}x^{N-1} + R_N(x)$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

積分の公式

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$$

$$\int \log x dx = x\log x - x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x|$$

$$\int \cot x dx = \log|\sin x|$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \tanh x dx = \log\cosh x$$

$$\int \coth x dx = \log|\sinh x|$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases} \quad (注)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x = \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}|\right)$$

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan x dx = \text{? (問 9 参照)}$$

$$\int \operatorname{arcsinh} x dx = x\operatorname{arcsinh} x - \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \operatorname{arctanh} x dx = x\operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)$$

(注)

- $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$ ではあるが、不定積分では定数の差は気にしないので、いづれでもよい。
- $\arcsin x, \arctan x$ 等は所謂主値を取る: $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$