中間試験のお知らせ

6月6日(月) 13:30 ～ 15:00

L-921教室 (ここではない)

- Taylor 展開を巡る諸々
  (今日 (5/30) の講義内容まで)
- まとめプリント §4 は範囲外
  (4. 指数関数とその仲間たち)
- 学生証必携・記名用のペンも持参のこと
- 座席指定
- 今日配布の「Taylor 展開の例」の表の
  必要部分は試験時にも配布する

補講 (質問会) のお知らせ

6 月 4 日 (土) 11:00 〜 12:30

12-201 教室 (ここではない)

- 自習・勉強会・質問会
- 講義内容は進まない
- 試験範囲は拡げない
- 出席は義務としない
- 途中入退室自由
- 質問がなければ途中で帰る

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を 行なってよいか？

$\longrightarrow$ “Taylor の定理”

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

: n 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$|R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

$\longrightarrow$ **剰余項 $R_N(f;x)$ の評価が問題**

Taylor の定理

f : N 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

系

(1 つ取って固定した x に対して)

$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$

$\Longrightarrow |R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow \infty)$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ **に対し、**

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

演習問題

$f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、

(1) $|R_N(f; 1)| < 10^{-4}$ となる (なるべく小さい) N を与えよ

(2) e の近似値を小数第 3 位まで求めよ

(3) 誤差が 10^{-3} 以下であることを保証せよ
(丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ)

n	$1/n!$
0	1
1	1
2	0.5
3	$0.16666\cdots$
4	$0.04166\cdots$
5	$0.00833\cdots$
6	$0.00138\cdots$
7	$0.00019\cdots$
8	$0.00002\cdots$
	$\cdots$

丸め誤差 $(\times 5)$

$\uparrow$ **各** $< 10^{-4}$

$\downarrow$ **打切誤差** $< 10^{-4}$

n	1/n!
0	1
1	1
2	0.5
3	0.1667
4	0.0417
5	0.0083
6	0.0014
7	0.0002
8	0.0000
	2.7183

$\fallingdotseq 2.718$

四捨五入して

- **各々の誤差を半分に**
- **誤差が打ち消し合うように**

丸め誤差 $(\times 5)$

$\uparrow$ **各** $< 0.5 \times 10^{-4}$

$\downarrow$ **打切誤差** $< 10^{-4}$

誤差 $< 3.5 \times 10^{-4} < 10^{-3}$

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- **級数が収束するか？**

- **収束したら元の関数と一致するか？**

- **誤差の理論的評価は？**

- **項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？**

項別微積分 (極限操作の順序交換)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (|x| < r) \text{ のとき}$$

$$\int_{t=0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(特に右辺は $|x| < r$ で絶対収束)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\left(a_n x^n\right)_{n=0}^{\infty} \arrow[r, "\text{項別微分}"] \arrow[d, "\text{有限和}"'] & \left(n a_n x^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty} \arrow[d, "\text{有限和}"] \\
\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right)_{N=0}^{\infty} \arrow[r, "\text{項別微分}", "=\text{微分}"'] \arrow[d, "N\to\infty"'] & \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1}\right)_{N=1}^{\infty} \arrow[d, "N\to\infty"] \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[r, "\text{微分}"'] & \dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{?}{=} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}
\end{tikzcd}
$$

極限操作が非可換な例:

$$
\begin{tikzcd}
\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^N \arrow[r, "N\to\infty"] \arrow[d, "x\to+\infty"'] & 0 \arrow[d, "x\to+\infty"] \\
1 \arrow[r, "N\to\infty"] & {\color{red}?}
\end{tikzcd}
$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N \neq \lim_{x\to+\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N$$

極限操作が非可換な例:

$$
\begin{array}{ccc}
\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^N & \xrightarrow{N\to\infty} & 0 \\
{\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\
1 & \xrightarrow{N\to\infty} & \color{red}{?}
\end{array}
$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N \color{red}{\neq} \lim_{x\to+\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N$$

例: 二項展開 (a は任意の実数で可)

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

: 二項係数 (binomial coefficient)

この展開の収束半径・剰余項の評価は ?

例: 二項展開 (a は任意の実数で可)

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{n(n-1)\cdot \cdots \cdot 1}$$

: 二項係数 (binomial coefficient)

この展開の収束半径・剰余項の評価は？

例: 二項展開 (a は任意の実数で可)

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

収束半径:

$$\left|\frac{\binom{a}{n+1}}{\binom{a}{n}}\right| = \left|\frac{a-n}{n+1}\right| \to 1 \ (n \to \infty)$$

より、収束半径 $1^{-1} = 1$ ($|x| < 1$ で絶対収束)

例: 二項展開 (a は任意の実数で可)

剰余項: $|x| < 1$ **に対して、**

$$R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N = \binom{a}{N}(1+\theta x)^{a-N}x^N$$

(特に x が -1 に近いとき) 直接の評価が困難
(実際 $a < 0$ のときは $x \to -1$ で発散)

$\longrightarrow$ **項別微積分を使って示そう**

例: 二項展開 (a は任意の実数で可)

剰余項: $|x| < 1$ **に対して、**

$$R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N = \binom{a}{N}(1+\theta x)^{a-N}x^N$$

(特に x が -1 に近いとき) 直接の評価が困難
(実際 $a < 0$ のときは $x \to -1$ で発散)

$\longrightarrow$ **項別微積分を使って示そう**

例: 二項展開 (a は任意の実数で可)

剰余項: $|x| < 1$ **に対して、**

$$
\begin{aligned}
R_N(f;x) &= \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \\
&= \binom{a}{N}(1+\theta x)^{a-N}x^N
\end{aligned}
$$

(特に x が -1 に近いとき) 直接の評価が困難
(実際 $a < 0$ のときは $x \to -1$ で発散)

$\longrightarrow$ **項別微積分を使って示そう**