授業アンケート実施「教員独自の設問」

(1) 入学前、数学は好きでしたか
(好き $\leftarrow$ 中間 $\rightarrow$ 嫌い)

(2) 今は数学は好きですか
(好き $\leftarrow$ 中間 $\rightarrow$ 嫌い)

(3) 理工学部共通の
１年配当の必修科目として
適切な内容だったと思いますか
(難し過ぎ $\leftarrow$ 適切 $\rightarrow$ 易し過ぎ)

今後の授業予定

- 7/4(月) (今日)
- ◇ 7/9(土) 2 限に補講 (質問会)
  教室： 9-353 教室 (ここじゃない)
- ○ 7/11(月) は見做し水曜日で本授業なし
- 7/12(火) (補講日) 3 限に補講
  教室： 3-221 教室 (ここ)
- 7/18(月) 期末試験 (3 限： 13:30～15:00)
  教室： 11-519 教室 (ここじゃない)

期末試験のお知らせ

7月18日(月) 13:30 〜 15:00

11-519 教室 (ここじゃない)

- 積分を巡る諸々
  (最終回(7/12)の講義内容まで)
- 中間試験前の内容も一部関連
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

補講 (質問会) のお知らせ

7月9日 (土) 11:00 ～ 12:30

9-353 教室 (ここじゃない)

- 自習・勉強会・質問会
- 講義内容は進まない
- 試験範囲は拡げない
- 出席は義務としない
- 途中入退室自由
- 質問がなければ途中で帰る

本講義後半の主題は、

積分

である

積分の定義

仮定:

- **積分区間** $I = [a, b]$ **: 有界閉区間**
- **被積分関数** $f : I$ **で 有界**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- **区間を分割せよ**
- **各区間で上下から見積もれ**
- **それを足し上げよ**
- **以上を全ての分割について考えよ**
- **上下からの見積が一致するか？**

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ： **区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ ： **各小区間** **(**$i = 1, \dots, n$**)**

$\delta(\Delta) := \max_i (x_i - x_{i-1})$ ： **分割の最大幅**

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$
$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

： **区間** I_i **に於ける** f **の下限・上限**

積分の定義

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

：分割 Δ に関する上下からの見積もり

$\longrightarrow$

$$s_\Delta \leq \text{“面積”} \leq S_\Delta$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta}$$ ： **下積分**

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta}$$ ： **上積分**

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない !!

積分の定義

$s = S$ のとき、これが “面積” と呼ぶべき唯一の値

この時、

f は I で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \left(\text{または} \int_I f(x)\,dx\right)$$

と書いて、

f の I に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

Darboux の定理:

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$: **分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$

(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

定積分の値の見当がついているときには、
次を利用することも出来る

$$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

$$\Updownarrow$$

任意の $\varepsilon > 0$ **に対し、**
$[a, b]$ **の或る分割** $\Delta = \Delta_\varepsilon$ **が存在して、**

$$I - \varepsilon < s_\Delta, \qquad S_\Delta < I + \varepsilon$$

<u>定理</u> (連続関数の積分可能性)：

f **: 閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
(このとき自動的に有界)

$$\Downarrow$$

f **:** I **に於いて積分可能**

証明の概略

$s(x), S(x)$ ： **区間** $[a, x]$ **に於ける下積分・上積分**

> **主張：**
> $s(x), S(x)$ ： **共に** $[a, b]$ **で微分可能で、**
> $$s'(x) = S'(x) = f(x)$$

これと $s(a) = S(a) = 0$ **とから、** $s(x) = S(x)$

特に、

$$s(b) = S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

定理:

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)

$$\Downarrow$$

f : I に於いて積分可能

証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)dt$$

(上端 x の関数で、**定積分関数**と呼ぶ)
が f の**原始関数**になっていることが判る

微分積分学の基本定理

f : **閉区間** $I=[a,b]$ **で連続のとき**

- $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

  即ち、$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ **とおくと、**

  F **は** f **の原始関数 (の一つ)**

- F **を** f **の原始関数 (の一つ) とすると、**

  $$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない (下端を指定しない) とき、

単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、

f **の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶ**

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f：連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f **: 連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f **: 連続のとき、　不定積分** $=$ **原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **で、**

$x = 1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **で、**

$x=1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- **積分区間が半開区間** $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$
- **しかもそこで被積分関数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **が非有界**

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- **積分区間が半開区間** $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$
- **しかもそこで被積分関数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **が非有界**

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

広義積分・変格積分 (improper integral)

- **区間が有界で、端点で関数が非有界**

  例： $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- **区間が非有界 (無限区間)**

  例： $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$\longrightarrow$ **共に、収束・発散の判定が重要**

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

f : $[a, b) = \{x | a \le x < b\}$ で定義され、
$x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
$[a, b - \varepsilon] = \{x | a \le x \le b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, b)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

と書く (広義積分が収束する とも言う)

区間が非有界 (無限区間) な場合

f **:** $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ **で定義され、**
任意の (どんな大きい) $M > a$ **に対しても、**
$[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ **で**
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x)dx$$

が定義される

区間が非有界 (無限区間) な場合

この状況で、

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, +\infty)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

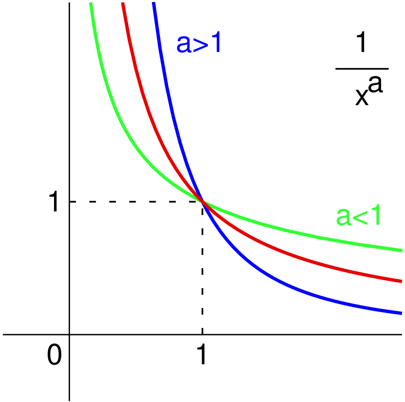
と書く (広義積分が収束する とも言う)

広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \geq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定 (の例)



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \Longrightarrow$ **収束**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \Longrightarrow$ **収束**

広義積分の収束判定 (の例)

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1+\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$$ **: 収束**

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1-\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_0^{1} f(x)dx$$ **: 収束**

注意: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ **は収束するとは言わない**

$\longrightarrow$ $[-1,0)$ **と** $(0,1]$ **とに分けて別々に考える:**

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = -\log\varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \to +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'}\frac{dx}{x} = \log\varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \to +0)$$

なので、 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x},\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ **はどちらも収束しない**

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$ ： Γ 関数

(ガンマ関数)

- 広義積分は $s > 0$ で収束
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

広義積分で定義される関数の例

$$B(s,t) = \int_0^1 x^s(1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

：B 関数

(ベータ関数)

- 広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束
- $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$