

## 期末試験のお知らせ

7月18日(月) 13:30 ~ 15:00

11-519 教室 (ここじゃない)

- 積分を巡る諸々  
(今日(7/12)の講義内容まで)
- 中間試験前の内容も一部関連
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

## 宣伝：秋期の数学関係の授業

- 理工共通科目Ⅱ群 (選択科目)
  - ★ 「ベクトル解析の基礎」
  - ★ 「微分方程式の基礎」
- 全学共通科目 (選択科目)
  - ★ 「現代数学 B」

## 積分の計算法

微分積分学の基本定理：

$f$ ：連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

→ 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる

→ 計算は今までに馴染みの  
諸公式・手法によれば良い

## 積分の計算法

しかし、(微分と違って)

良く知っている関数でも

不定積分 (原始関数) が  
(原理的に) 計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」  
の公式が存在しない!!

## 積分の計算法

しかし、(微分と違って)

良く知っている関数でも

不定積分 (原始関数) が  
(原理的に) 計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」  
の公式が存在しない!!

例：不定積分  $\int \frac{e^x}{x} dx$  は、

- 有理関数・三角関数・指数関数  
および、それらの逆関数の
- 有限回の合成で作れる関数

(初等関数という) の範囲に収まらないことが  
証明されている

要は、

## 出来るものしか出来ない

ので、個別のテクニックを追っても切りがない。

そこで、個別の例は  
公式集などを参照すれば良いことにして、

ここでは、

“原理的に計算できる例”  
を幾つか紹介する

## “原理的に計算できる” 不定積分の例

- 有理関数
- $\sqrt[n]{1}$  次式 1 種類
- $\sqrt{2}$  次式 1 種類
- $\sqrt{1}$  次式 2 種類
- 三角関数の有理関数



## 有理関数の不定積分の基本形

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \log|x-a|$
- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$
- $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2+1)$
- $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$  は難しいが、出来る  
(部分積分して  $n$  についての漸化式を作る)

## 部分分数分解

多項式  $f(X), g(X)$  が互いに素 (共通因数なし) のとき

$$\frac{\text{多項式}}{f(X)g(X)} = \frac{\text{多項式}}{f(X)} + \frac{\text{多項式}}{g(X)}$$

の形に書ける

## 部分分数分解

実数係数多項式  $f(X) \in \mathbb{R}[X]$  は、

実数係数の範囲で、

$$f(X) = f_1(X)^{n_1} \cdots f_k(X)^{n_k}$$

(各  $f_i$  は 1 次式 または 実根なしの 2 次式)

と因数分解される

→ 有理関数の積分はさっきの基本形に帰着

## 演習問題 (前回配布プリント)

### 有理関数

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 8}{(x-1)^2(x^2 - 6x + 13)}$$

の不定積分を計算したい。

(1)  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c(2x-6) + d}{x^2 - 6x + 13}$   
を満たす定数  $a, b, c, d$  を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、  
 $\int f(x) dx$  を求めよ。

## $x$ と $\sqrt[n]{ax+b}$ との有理式

少々乱暴にも見えるが、

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

と置いてしまうのが簡明

→  $y$  の有理式の積分に帰着

## $x$ と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ との有理式

これも  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  と置いてみると、

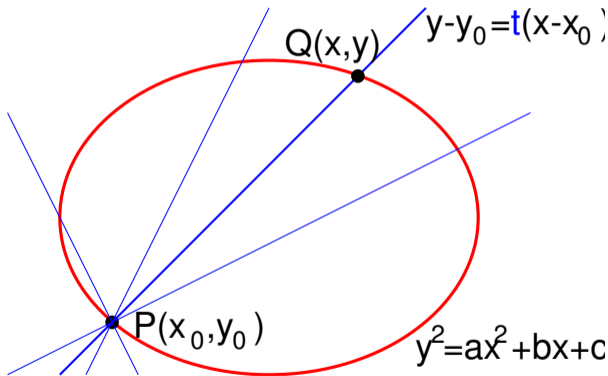
$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

(楕円または双曲線の方程式)

→ 曲線上に 1 点を取ると、有理媒介変数表示可能

→ 有理式の積分に帰着

## $x$ と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ との有理式



例： $\int \sqrt{1+x^2} dx$

ものの本には「 $t = x + \sqrt{1+x^2}$ 」とあるが、

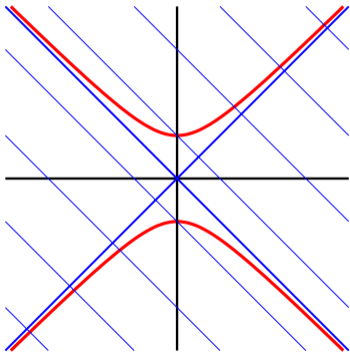
そういうのは覚えようとするときりがないので、

単純に  $y = \sqrt{1+x^2}$  と置いて、

双曲線  $y^2 = 1+x^2$  の幾何を観察しよう



例： $\int \sqrt{1+x^2} dx \longrightarrow y = \sqrt{1+x^2}$  と置く



双曲線

$$y^2 = 1 + x^2$$

の漸近線

$$x + y = 0$$

の“無限遠”に

“点P”を取る

“点P”を通る

直線は平行線

$$x + y = t$$

## 三角関数 $\sin \theta, \cos \theta$ の有理式

ものの本には「 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ 」とあるが、

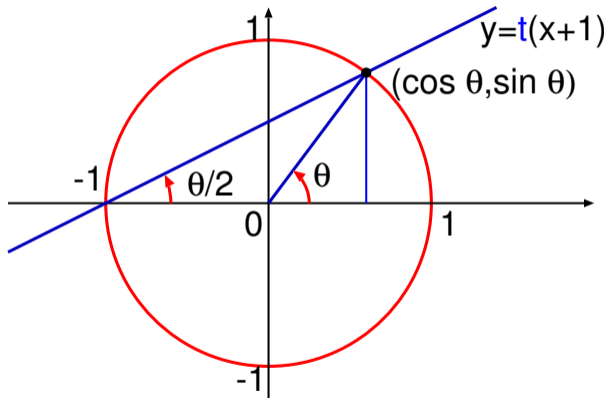
これも幾何を見よう

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

と置けば、円  $x^2 + y^2 = 1$  上での積分

→ 円の有理媒介変数表示で有理式の積分に帰着

## 三角関数 $\sin \theta, \cos \theta$ の有理式



実際の応用では、

明示的な表示もさることながら、

- 収束性の吟味
- 数値計算 (近似値計算・数値積分)
- 漸近的評価 ( $x \rightarrow +\infty$  での挙動)

なども重要である

## 終わりに

無闇に計算するだけが数学じゃない。

- 現象を観察すること
- 対象をどこまでも良く解ろうとすること
- それを紛れなく表現して伝えること

が大切なのだ。

おしまい