2012年度後期　代数3　期末試験　(担当：角皆)

実施: 2013年2月4日 (月), 10:40 〜 12:10, 14–717B 教室

問1. 3 次方程式 $X^3 - 12X - 34 = 0$ を解け。

問2. 体の拡大 L/K において、

(1) L の元 x が K 上代数的であることの定義を述べよ。
(2) 拡大 L/K が代数的であることの定義を述べよ。
(3) 拡大 L/K の次数 $[L:K]$ の定義を述べよ。
(4) 拡大次数 $[L:K]$ が有限であれば、拡大 L/K は代数的であることを示せ。

問3. 次の体拡大は Galois 拡大ではない。理由を簡潔に述べよ。

(1) $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})/\boldsymbol{Q}$
(2) $\boldsymbol{F}_p(T)/\boldsymbol{F}_p(T^p)$ (p は素数、T は $\boldsymbol{F}_p$ 上超越的)

問4. (本問を解答する場合には次問は解答する必要はない。)
$\zeta = \zeta_7 := e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \boldsymbol{C}$ について、実は $\zeta \in \overline{\boldsymbol{Q}}$ である。

(1) ζ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $\Phi_7(X) := \mathrm{Irr}(\zeta;\boldsymbol{Q})(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ 及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(2) $K_7 := \boldsymbol{Q}(\zeta_7)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群 $G := \mathrm{Gal}(K_7/\boldsymbol{Q})$ の構造を明らかにせよ。
(3) $\omega = \omega_7 := \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(4) $\alpha := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(5) G の部分群と $K_7/\boldsymbol{Q}$ の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、各中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

問5. (前問が難しい場合には本問を解答せよ。)
$\zeta = \zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \boldsymbol{C}$ について、実は $\zeta \in \overline{\boldsymbol{Q}}$ である。

(1) ζ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $\Phi_5(X) := \mathrm{Irr}(\zeta;\boldsymbol{Q})(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ 及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(2) $K_5 := \boldsymbol{Q}(\zeta_5)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群 $G := \mathrm{Gal}(K_5/\boldsymbol{Q})$ の構造を明らかにせよ。
(3) $\omega = \omega_5 := \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(4) G の部分群と $K_5/\boldsymbol{Q}$ の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

問6. $L := \boldsymbol{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 拡大である。$L/\boldsymbol{Q}$ の Galois 群を $G := \mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$ とし、$\sigma, \tau \in G$ を次で与える:

$$\sigma : \begin{cases} \sqrt[5]{2} \longmapsto \sqrt[5]{2} \\ \zeta_5 \longmapsto \zeta_5^2, \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} \sqrt[5]{2} \longmapsto \zeta_5\sqrt[5]{2} \\ \zeta_5 \longmapsto \zeta_5. \end{cases}$$

(1) $f(X) = X^5 - 2 \in \boldsymbol{Q}[X]$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体が L に等しいことを示せ。
(2) σ, τ の位数を求めよ。
(3) $\sigma\tau$ を $\tau^i\sigma^j$ の形で表せ。
(4) L の $\boldsymbol{Q}$ 上の拡大次数 $[L:\boldsymbol{Q}]$ を求めよ。
(5) $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ であることを示せ。
(6) G の部分群と $L/\boldsymbol{Q}$ の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。

以上