2012 年度後期

代数３

(教育学部数学科)

(担当: 角皆)

Galois 理論

- 方程式の解け方の様子
- 体拡大の様子

を **Galois 群**によって計る

授業概要

今までの代数系科目を踏まえて、
体論およびガロア理論について講義する。

体論の基礎事項について復習・補充をした後、

ガロア理論の基本定理を紹介し、

基本的な例として
有限体・円分体・クンマー拡大などに触れ、

併せて古典的な問題意識として
方程式の解法理論や作図問題との関連にも
時間があれば触れたい。(シラバスより)

本講義の概要・予定

- 古典的な方程式論 (3 次・4 次方程式の根の公式)
- 体論の基礎事項の復習
(代数拡大・拡大次数・正則表現
・ノルム・トレースなど)
- 共役・正規拡大・標数・有限体・分離拡大
- 体拡大の自己同型群・ガロア拡大・ガロア群
- ガロア理論の基本定理・ガロア対応・計算例
- 円分体・有限体のガロア理論・巡回クンマー拡大
- 方程式のべき根による解法・古典的作図問題など

さて、初めに $\cdots$

3 次方程式・4 次方程式の一般解法 (解の公式)

って知ってますか？

$\longrightarrow$ 方程式の解法探求の歴史

$\longrightarrow$ まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう
(人間と数学の歴史を振り返る)

小学校：

- **自然数 (正の整数) の＋×**
- **－は出来ない時がある**
- **÷は商と余りとを求める (整除)**
- **分数を用いた÷ (正の有理数)**
- **小数 (近似値・正の実数)**

中学・高校：

- 正負の数の四則 (＋－×÷)
- 文字式 (多項式) の＋－×
- ÷は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

ところで ・・・

大学で数学を習って

新しく出来るようになったことってある？

中学・高校：

- 正負の数の四則 (＋－×÷)
- 文字式 (多項式) の＋－×
- ÷は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算 (余りを求める)

$\Downarrow$

Gröbner 基底

(広中-Buchberger の algorithm)

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 $\longrightarrow$ (一般には高次の)1 変数方程式へ
(変数消去)

ここでは、

3 次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2 次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
(紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- **問題も解法も言葉で表された**
- **係数は正の数のみ (非整数も OK)**
- **(正数の範囲の) 引き算は OK**
- **解も正の数のみ**

2 次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた。($a > 0, b > 0$)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

($\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い?!)

3 次方程式の解法 (根の公式) は？

「**根の公式**」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算 (小数)

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
(但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見ていこう。

(以下、暫く板書で)

3 次方程式の根の公式 (Fontana-Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ **の根は、**

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3 **乗根は掛けて** $-\frac{p}{3}$ **となるように取る)**

3 **乗根の** 1 **組を** u, v **とすると、(**$\omega^2 + \omega + 1 = 0$**)**

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

4 次方程式の解法の発見 (16 世紀前半, Ferrari)

3 次方程式の解法から間もなく

- **時代が熟していた？**
  (考察の蓄積・記号法の発達など)

- **難しさの違いが少ない？**
  $\longrightarrow$ **“難しさ” ってどう計る ?**

(以下、暫く板書で)