

# Galois 理論

- 方程式の解け方の様子
- 体拡大の様子

を **Galois 群** によって計る

### 3 次方程式の根の公式 (Fontana-Cardano の公式)

---

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$  の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて  $-\frac{p}{3}$  となるように取る)

3乗根の1組を  $u, v$  とすると、( $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ )

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

### 3 次多項式の判別式

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i) \quad \text{に対し、}$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &\quad : f \text{ の判別式 (discriminant)} \end{aligned}$$

- $x_1, x_2, x_3$  の対称式  
→ 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$  が重根を持つ  $\iff D(f) = 0$

### 3 次多項式の判別式

根と係数との関係を用いて判別式を求めると、

$f(X) = X^3 + pX + q$  の判別式は

$$D = D(f) = -4p^3 - 27q^2$$

**Fontana-Cardano** の公式は次の形

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega - \omega^2)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega^2 - \omega)}}$$

(2 次方程式と同様に、根に  $\sqrt{D}$  が現れる!!)

### 3 次方程式の “不還元の場合”

実は、3 実根を持つ 3 次方程式を

Fontana-Cardano の方法で解くと、

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{D}{108} < 0$$

となり、負数の平方根を経由する (不可避)

… “不還元の場合 (Casus irreducibilis)”

歴史上で、負数の平方根が扱われた最初

“存在しない” 数を形式的に扱おうと、

“存在する” 実根が計算できる

→ 数式の形式的な操作の有用性

## 4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数  $t$  を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは  $t$  の 3 次方程式

**(Fontana-Cardano の公式で解ける!!)**

→ この  $t$  を用いて解く

## 4 次多項式の 3 次分解式

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 (解核多項式, **resolvent**)

$T := 2t$  において、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

$R(T)$  が因数分解できる

$\iff f(X)$  の根が 3 乗根を用いずに表せる

## 5 次以上の方程式の解法への模索

有力な方法の一つ：Tschirnhaus 変換

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

に対し、

$$Y = X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1}$$

の形の変換で、

解ける方程式 ( $Y^n = c$  など) にならないか？



## 5 次以上の方程式の解法への模索

しかし、次の進展は、

3 次・4 次方程式の解法の発見から、  
200 年以上も待たねばならなかった

→ 200 年後 (18 世紀後半) : **Lagrange** の考察

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析  
(群論の萌芽・**Galois 理論**への一歩)

実は、4 次以下と 5 次以上とでは、  
問題の難しさが本質的に違った  
のだった

## 体拡大の Galois 理論

- 方程式の解け方の様子
- 体拡大の様子

を **Galois 群**によって計る

Galois の理論は元々は方程式論であったが、  
現代では体拡大の理論として扱うことが多い  
その前にちょっとお話から

「数」とは何だろうか？

(というか、  
我々が普通「数」だと思っているものは、  
どのようなものだっただろうか？)

## 「数」体系の拡張

$\mathbb{N}$  : 自然数全体

$\supset$

$\mathbb{Z}$  : 整数全体 (整数環)

$\supset$

$\mathbb{Q}$  : 有理数全体 (有理数体)

$\supset$

$\mathbb{R}$  : 実数全体 (実数体)

$\supset$

$\mathbb{C}$  : 複素数全体 (複素数体)

## 「数」体系の拡張

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

我々がこれを

「数」体系の拡張

と思ってきたのは、

新たに付け加わったもの達も

「数」

だと思ってきたということである

ところが...

## 「数」? の例 1 : 剰余類の成す体の拡大

合同式 ( $a \equiv b \pmod{m}$ ) は有用であった  
(現代風に言えば、剰余環  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  を考えた)

一方、 $\mathbb{R}$  内では  $X^2 + 1 = 0$  に解がなかったが、

この“解”を仮想すると便利なので、

$i = \sqrt{-1}$  を「数」だと認識して、  
「数」体系を  $\mathbb{C}$  まで拡張した

## 「数」? の例 1 : 剰余類の成す体の拡大

さて、例えば、

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  内には、やはり  $X^2 + 1 = 0$  の解がない

| $X$ | $X^2 + 1 \pmod{3}$ |
|-----|--------------------|
| 0   | 1                  |
| 1   | 2                  |
| 2   | 2                  |

では、ここに “ $\sqrt{-1}$ ” を付け加えて

「数」を拡張することが出来るのか？

(この “ $\sqrt{-1}$ ” は「数」なのか？)

## 「数」? の例 2 : p 進数

実数は、

有理数 (特に十進有限小数) の極限

として定式化された

$$\begin{aligned}\pi &= 3.141592653598793228462643383279\dots \\ &= 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \dots\end{aligned}$$

計算は、適当な精度で途中で打ち切って行なう

## 「数」? の例 2 : p 進数

一方、20世紀初頭に Hensel は、  
次のような“極限”を考えることを提唱した

素数  $p$  に対し、

$$x = a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots$$

… p 進数 (**p-adic numbers**)

任意の  $N$  に対し、 $\text{mod } p^N$  での計算は、  
その“精度”で途中で打ち切って出来る



## 「数」? の例 2 : p 進数

$X^2 = -1$  を mod  $5^N$  で解こう

$$-1 \equiv (2 \cdot 5^0)^2 \pmod{5^1}$$

$$-1 \equiv (2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1)^2 \pmod{5^2}$$

$$-1 \equiv (2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2)^2 \pmod{5^3}$$

...

$$-1 = 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + \dots$$

この最後の式の右辺

$$2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + \dots$$

は「数」なのか?

我々はどんなものを「数」と思ってきたか？

“「数」の範囲”の満たすべき性質は？

→ 不自由なく計算 (四則演算) が行える

→ 公理化 (公理的な「体論」の誕生)

**体** : Körper (独), corps (仏), field (英)

では、現代的な「体論」の授業に戻ろう

本授業では専ら、体の有限次代数拡大を扱う

まずは、代数拡大の基本事項の確認・復習から

(以下、暫く板書で)