有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

> **定理：**
>
> $$\mathrm{L}：\text{正規言語}$$
> $$\Updownarrow$$
> $$\mathrm{L}\ \text{が或る有限オートマトンで認識される}$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$$\Longleftrightarrow$$ **"待ち" が有限種類**

$$\begin{aligned} \ell_w : \Sigma^* &\longrightarrow \Sigma^* \\ v &\longmapsto wv \end{aligned}$$ **: "左平行移動"**

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$$\begin{aligned} S_L : \Sigma^* &\longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ w &\longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L) \end{aligned}$$ **: "待ち" の集合**

$$\# \mathrm{Im} S_L < \infty \Longleftrightarrow \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない言語が存在する!!

($\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する)

例：$A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ (a と b との個数が同じ)
実際 $w_n = a^n b$ に対する $S_L(w_n)$ が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法
(の一種の pumping lemma)
を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
($\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する)

例： $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **(a と b との個数が同じ)**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
(の一種の pumping lemma)
を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
($\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する)

例： $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **(a と b との個数が同じ)**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
(の一種の pumping lemma)
を利用することが多い

Pumping Lemma (注入補題・反復補題)

正規言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbb{N}:$

$\forall w \in A, |w| \geq n:$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz$

(1) $y \neq \varepsilon$
(2) $|xy| \leq n$
(3) $\forall k \geq 0 : xy^k z \in A$

有限オートマトンで認識できる／ない言語の例

$\Sigma = \{a, b\}$

- a と b との個数が同じ
- a が幾つか続いた後に b が幾つか続いたもの
- a で始まり a, b が交互に並んで b で終わる
- 同じ文字列 2 回の繰返しから成る
- 回文 (palindrome)

などなど

このうちで、有限オートマトンで認識できる言語は?

有限オートマトンで認識できないな言語が存在する

$\Downarrow$

より強力な計算モデルが必要

$\Downarrow$

- **プッシュダウンオートマトン**
- **チューリングマシン**

有限オートマトンで認識できない言語が存在する

$\Downarrow$

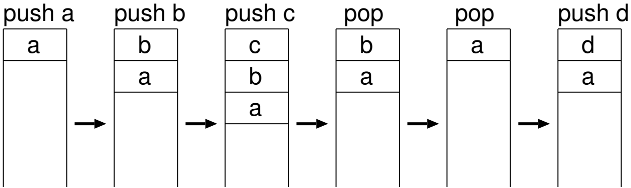
より強力な計算モデルが必要

$\Downarrow$

- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

プッシュダウンオートマトン

(非決定性) 有限オートマトンに
プッシュダウンスタックを取り付けたもの



無限 (非有界) の情報を保持できるが、
読み書きは先頭だけ

$\cdots$ **LIFO (Last In First Out)**

有限オートマトンより強力な計算モデル

$\Downarrow$

正規言語より広い範囲の言語を扱う

$\Downarrow$

生成規則による言語の記述 (生成文法)

例：“文法に適っている” 数式とは
どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字 (変数名) は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

$\longrightarrow$ これは式を作り出す規則とも考えられる

例： "文法に適っている" 数式とは
どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字 (変数名) は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

$\longrightarrow$ これは式を作り出す規則とも考えられる

例： “文法に適っている” 数式とは
どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- **単独の文字 (変数名) は式**
- **式と式とを演算子で繋いだものは式**
- **式を括弧で括ったものは式**
- **それだけ**

$\longrightarrow$ **これは式を作り出す規則とも考えられる**

“文法に適っている” 数式

初期記号 (開始変数) E から出発して、次の規則のいずれかを “非決定的に” 適用して得られるもの のみ

- $E \to A$
- $E \to EBE$
- $E \to (E)$
- $A \to$ **変数名のどれか**
- $B \to$ **演算子のどれか**
- **変数名・演算子・(・) は それ以上書換えない (終端記号)**

$\longrightarrow$ **生成規則 (書換規則)**

“文法に適っている” 数式

初期記号 (開始変数) E から出発して、
次の規則のいづれかを
“非決定的に” 適用して得られるもの のみ

- $\mathrm{E} \to \mathrm{A}$
- $\mathrm{E} \to \mathrm{EBE}$
- $\mathrm{E} \to (\mathrm{E})$
- $\mathrm{A} \to$ **変数名のどれか**
- $\mathrm{B} \to$ **演算子のどれか**
- **変数名・演算子・(・) は**
  それ以上書換えない (終端記号)

$\longrightarrow$ **生成規則 (書換規則)**

生成規則・生成文法

生成規則を与えることでも
言語を定めることが出来る

$\longrightarrow$ **生成文法 (generative grammar)**

生成規則による “文法に適っている” 語の生成

- 初期変数を書く
- 今ある文字列中の或る変数を
生成規則のどれかで書換える
- 変数がなくなったら終わり

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$

(a が偶数個 (0 個も可) 続いた後に、b が奇数個続く)

正規表現で表すと、$(aa)^*b(bb)^*$

- $S \to aaS$
- $S \to bB$
- $B \to bbB$
- $B \to \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \to aaS | bB$
- $B \to bbB | \varepsilon$

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$

(a が偶数個 (0 個も可) 続いた後に、b が奇数個続く)

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \rightarrow aaS$
- $S \rightarrow bB$
- $B \rightarrow bbB$
- $B \rightarrow \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \rightarrow aaS|bB$
- $B \rightarrow bbB|\varepsilon$

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$
(a が偶数個 (0 個も可) 続いた後に、b が奇数個続く)

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \to aaS$
- $S \to bB$
- $B \to bbB$
- $B \to \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \to aaS | bB$
- $B \to bbB | \varepsilon$