1. 不等式・ε-δ 論法

1–1. **不等式の基本性質.**

- $x \le y, y \le z \Longrightarrow x \le z$: **推移律** (**transitive law**)
- $x \le y, y \le x \Longrightarrow x = y$: **反対称律** (**anti-symmetric law**)
- 演算との関係 :
  - $\star$ $x \le y \Longrightarrow x + a \le y + a$
  - $\star$ $a > 0, x \le y \Longrightarrow ax \le ay$
- $|x + y| \le |x| + |y|$: **三角不等式** (**triangle inequality**)

1–2. ε-δ **式の極限の定式化.**

- 関数 f に対し、$x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow b$
  ($f(x)$ が b に**収束** (**converge**) する, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$)
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- 関数 f が $x = a$ で**連続** (**continuous**) $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
  $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

1–3. **演習問題.**

(1) 関数 $f(x) = x^3$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon > 0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $0 < |h| < \delta$ に対し、
> $\cdots$
> $|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon$ を示す
> $\cdots$
> 従って、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x = a$ で連続。

(2) 2 つの関数 f_1, f_2 が共に $x = a$ で連続であるとき、$g(x) := f_1(x) + f_2(x)$ で定義される関数 g (関数 f_1, f_2 の和といい、通常 $f_1 + f_2$ と書く) も $x = a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon > 0$ を取る。
> f_1 は $x = a$ で連続であるから、
> $$\exists\delta_1 > 0 : 0 < |h| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(a + h) - f_1(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
> f_2 は $x = a$ で連続であるから、同様に、
> $\boxed{f_1 \text{ と同様}}$
> $\delta := \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $0 < |h| < \delta$ に対し、
> $\cdots$
> $|g(a + h) - g(a)| < \varepsilon$ を示す
> $\cdots$
> 従って、$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ となり、g は $x = a$ で連続。

(3) 同様に、2 つの関数 f_1, f_2 が共に $x = a$ で連続であるとき、$h(x) := f_1(x)f_2(x)$ で定義される関数 h (関数 f_1, f_2 の積といい、通常 $f_1 f_2$ と書く) も $x = a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。

(4) $f(x) := \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (x \text{ が無理数}) \end{cases}$ で定義される f は、どんな x においても連続でないことを示せ。(どんな短い区間にも有理数・無理数がともに属することを用いよ。)

(5) $f(x) := \begin{cases} x & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (x \text{ が無理数}) \end{cases}$ で定義される f の連続性について論ぜよ。