# 3. 級数の収束性

**3–1. 数列・級数・関数の収束.**

- 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が値 $a$ に**収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |a - a_n| < \varepsilon$
- 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が値 $a$ に**収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ 部分和の成す数列 $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n=0}^{\infty}$ が $a$ に収束
- 数列・級数が収束しない時は全て**発散**というが、特に、
  数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が**正の無限大に発散** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M : \exists N : \forall n > N : a_n > M$
- 関数 $f(x)$ が $x \to x_0$ で値 $a$ に**収束**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$
- 関数 $f(x)$ が $x \to +\infty$ で値 $a$ に**収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0 : \exists M : \forall x > M : |f(x) - a| < \varepsilon$
- 関数 $f(x)$ が $x \to x_0$ で**正の無限大に発散**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M : \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

**3–2. 絶対収束.**

- (上に) 有界な単調増加数列はその上限に収束する。
  - ⋆ 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が**上に有界** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M : \forall n : a_n \leq M$
  - ⋆ 上に有界な数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ の**上限** (最小上界) $\sup a_n := \min\{M | \forall N : a_n \leq M\}$
    (即ち、$\forall N : a_n \leq M_0$ かつ $\forall\varepsilon > 0 : \exists N : a_n > M_0 - \varepsilon$ となる $M_0$ のこと)
- 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ はその部分和が (上に) 有界ならその上限に収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限値は変わらない (同じ値に収束)。
- 絶対収束する級数は収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限値は変わらない (同じ値に収束)。
  - ⋆ 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が**絶対収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束
- 収束するが絶対収束しない級数 (条件収束) では、項の順番を入れ換えると、(正負の無限大を含めて) 任意の値に収束し得る。
- 交替級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ($n$:偶数の時 $a_n > 0$, $n$:奇数の時 $a_n < 0$) は、$a_n \to 0$ なら収束する (絶対収束するとは限らない)。

**3–3. 級数の収束性判定.** 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について

- 既知の正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ と比較して
  - ⋆ 有限個の $n$ を除いて $a_n \leq b_n$ で $\sum b_n$ : 収束 $\Rightarrow \sum a_n$ : 収束
  - ⋆ 有限個の $n$ を除いて $a_n \geq b_n$ で $\sum b_n$ : 発散 $\Rightarrow \sum a_n$ : 発散

  注: 上記の判定法で、
  - ⋆ 途中からでも良い ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ などでも可)
  - ⋆ 定数倍しても良い ($\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$ などでも可)
- d'Alembert の判定法 (比テスト)
  - ⋆ ($\exists r < 1$ : 有限個の $n$ を除いて $a_{n+1}/a_n \leq r$) $\Rightarrow \sum a_n$ : 収束
  - ⋆ $a_{n+1}/a_n \to r (n \to \infty)$ のとき、
    $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$ : 収束, $\quad r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ : 発散
- Cauchy の判定法 ($n$ 乗根テスト)
  - ⋆ ($\exists r < 1$ : 有限個の $n$ を除いて $\sqrt[n]{a_n} \leq r$) $\Rightarrow \sum a_n$ : 収束
  - ⋆ $\sqrt[n]{a_n} \to r (n \to \infty)$ のとき、
    $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$ : 収束, $\quad r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ : 発散
- 上記の判定法で $r = 1$ の時はこれだけでは判らない。(より精密な判定法あり。)

**3–4. 級数の収束・発散の例.**

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $|x| < 1$ で絶対収束 $\left(= \dfrac{1}{1-x}\right)$、$|x| \geq 1$ で発散
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ で (絶対) 収束、$s \leq 1$ で発散
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ は $s > 1$ で (絶対) 収束、$s \leq 1$ で発散