

4. TAYLOR 展開

4-1. 冪級数の収束性・収束半径.

- 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 が $r \iff |x| < r$ で収束、 $|x| > r$ で発散
($\forall x$ で収束する時は便宜上 $r = \infty$ という。 $x = 0$ のみで収束する時は $r = 0$ 。)
- 収束半径 r の時、 $|x| = r$ を収束円といい、 $|x| < r$ の範囲を収束円内という。
- 冪級数はその収束円内で ($r = \infty$ の時は $\forall x$ で) 絶対収束する。 $|x| = r$ の時は判らない (いろいろな場合がある)。
- Cauchy の判定法 (n 乗根テスト): $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow s (n \rightarrow \infty) \implies$ 収束半径は s^{-1}
- d'Alembert の判定法 (比テスト): $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow s (n \rightarrow \infty) \implies$ 収束半径は s^{-1}
- 上極限を用いた収束半径の公式: $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

4-2. Taylor 展開.

- 何回でも微分できる関数 $f(x)$ の ($x = 0$ を中心とする) (形式的) Taylor 展開

$$\begin{aligned}
 (\spadesuit) \quad f(x) & \text{ “=” } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
 & = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots
 \end{aligned}$$

- 剰余項: $R_N(x) := f(x) - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$
- 剰余項の評価 (Taylor の定理): f が N 階微分可能の時、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

- 証明に使う定理:
 - ★ Rolle の定理:
 f : 閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能、 $f(a) = f(b)$
 $\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$
 - ★ Cauchy の平均値の定理:
 f, g : 共に 閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能で
 * $\exists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
 * $(f(a), g(a)) \neq (f(b), g(b))$
 $\implies \exists c \in (a, b) : [f(a) - f(b) : g(a) - g(b)] = [f'(c) : g'(c)]$ (比が等しい)
- $N \rightarrow \infty$ で $R_N(x) \rightarrow 0$ の時、 (\spadesuit) の右辺は収束して本当に $= f(x)$
- 例えば $\exists c : \forall N, 0 < \forall \theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < c^N$ ならばよい。
- 形式的 Taylor 展開が元の関数に一致しない例: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

4-3. 項別微積分. 冪級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < r$) について

- $\int_{t=0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ($|x| < r$)
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ($|x| < r$)

特に $f(x)$ は収束円内 $|x| < r$ で何回でも微分可能。

4-4. 二項展開. $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

- $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$: 二項係数
- $\alpha = N \in \mathbf{N}$ の時は普通の二項定理 : $(1+x)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n$
- $\alpha \notin \mathbf{N}$ の時は本当に無限和で、収束半径 1

4-5. Landau の o -記号, O -記号.

- $f(x) = o(g(x)) (x \rightarrow a) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 (x \rightarrow a)$
 $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f_1(x) = f_2(x) + o(g(x)) (x \rightarrow a) \iff f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$
- $f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow a) \iff \frac{f(x)}{g(x)} : \text{有界} (x \rightarrow a)$
 $\iff \exists C > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < C|g(x)|$
- $x \rightarrow +\infty$ 等に対しても同様。
- f が $(x=0$ の近くで) N 回微分可能ならば、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N + o(x^N) \quad (x \rightarrow 0)$$

- 例 :
 - ★ $a < b$ に対し $x^b = o(x^a) (x \rightarrow 0)$, $x^a = o(x^b) (x \rightarrow +\infty)$
 - ★ $\forall a \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ に対し $x^a = o(e^{\varepsilon x}) (x \rightarrow +\infty)$
 - ★ $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\log x = o(x^\varepsilon) (x \rightarrow +\infty)$
 - ★ $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\log x = o(x^{-\varepsilon}) (x \rightarrow +0)$

5. 指数関数とその仲間たち

5-1. 逆三角関数.

- 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを逆三角関数という。
- $y = \sin x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arcsin x (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$: 主値
(しばしば $\text{Arcsin } x$ と書かれる)
- $y = \tan x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arctan x (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$: 主値
(しばしば $\text{Arctan } x$ と書かれる)
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

5-2. Euler の公式.

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$

5-3. 双曲線関数.

- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- 三角関数と類似の公式が多く成立