6. 一変数関数の積分

6–1. **定積分の定義.** 関数 $y=f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$ で有界とする。

- $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$: 区間 $[a,b]$ の**分割**
  $I_i:=[x_{i-1},x_i]$: 各小区間 $(i=1,\ldots,n)$
  小区間の最大幅 $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$ を $|\Delta|,\delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i:=\inf\limits_{x\in I_i} f(x),\ M_i:=\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta:=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),\ S_\Delta:=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$
- $s:=\sup\limits_{\Delta} s_\Delta,\ S:=\inf\limits_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a,b]$ での**下積分・上積分**
- f が $[a,b]$ で**積分可能** $\overset{\leftharpoonup}{\Longleftrightarrow}$ $s=S$
  この時、$s=S=:\displaystyle\int_a^b f(x)dx$: f の $[a,b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$: 分割の列で、$|\Delta_n|\to 0$ とする。この時、$s_{\Delta_n}\to s, S_{\Delta_n}\to S\ (n\to\infty)$。
- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る :
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=I \iff \forall\varepsilon>0:\exists\Delta=\Delta_\varepsilon:[a,b]$ の分割 $: I-\varepsilon<s_\Delta, S_\Delta<I+\varepsilon$
- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある :
  - ⋆ $\Xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$: 各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i\in I_i)$
    $I(\Delta,\Xi):=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$: **Riemann 和**
  - ⋆ f が $[a,b]$ で積分可能 $\Longleftrightarrow \exists\lim\limits_{|\Delta|\to 0} I(\Delta,\Xi)$。この時、$\lim\limits_{|\Delta|\to 0} I(\Delta,\Xi)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

6–2. **積分の基本性質.**

- 区間に関する加法性 : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$
- 線型性: $\displaystyle\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性 : $[a,b]$ で $f(x)\ge g(x)\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

6–3. **不定積分.** 定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\displaystyle\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

6–4. **微分積分学の基本定理.** f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

即ち、**不定積分** = **原始関数** (微分すると f になる関数)。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅!!
又、F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)\left(=\Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く}\right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より

6–5. **広義積分 (変格積分).** 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。
下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f : 区間 $[a, b)$ (resp. $(a, b]$) の上端 b (resp. 下端 a) の近くで有界でない場合
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- f : 区間 $[a, +\infty)$ (resp. $(-\infty, b]$) で定義されている場合
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^b f(x)dx$$
- f : 区間 $[a, b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
→積分区間を $[a, c), (c, b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f : 積分区間の両端 a, b で広義積分の場合 (a, b の近くで有界でないか、$a, b = \pm\infty$)
→適当な点 c で積分区間を $(a, c], [c, b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{発散}, \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$
- 比較判定法 (簡単な場合)
$$\star\ \exists\varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) (x \to +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$
$$\star\ \exists\varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right) (x \to +0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

6–6. Γ **関数・**B **関数.**

- $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s \frac{dx}{x}$: Γ **関数** (広義積分は $s > 0$ で収束)
- $\mathrm{B}(s, t) = \displaystyle\int_0^1 x^s(1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$: B **関数** (広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束)
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}, \quad \mathrm{B}(s, t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

7. 演習問題

問 7–1. $I = [0, 1]$ で定義された関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ を考える。

(1) 任意の分割 Δ に対し、$s_\Delta = 0$ である。
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$S_\Delta \leq \varepsilon$ なる分割 Δ が存在する。(実際に Δ を作ってみよ。)
(3) 以上より $s = S = 0$ となるので、f は I で積分可能で、$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ である。

問 7–2. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos x}$ について、積分 $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を考える。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$ である。(従って、I は $x = 0$ の所で広義積分。)
(2) Taylor 展開を用いて、$\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ が、有限な値 c を持つ。
(3) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2}{1-\cos x} = c$ とは、$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow c - \varepsilon < \dfrac{x^2}{1-\cos x} < c + \varepsilon$
ということである。このことから、$f(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $(x \to +0)$ である。
(4) 従って、比較判定法により広義積分 I は収束する。

(実際に暗算で判断する場合には、$x = 0$ の近くで $1 - \cos x$ は大体 x^2 くらいなので、$f(x)$ は $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ くらい、というようなことで良い。)