8. 積分の計算法

8–1. **有理関数の積分.** 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し $c>0$)

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$: $n=1$ なら $\log|x-a|$, $n\geq 2$ なら $\displaystyle -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$: 変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b, \sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
  $\to n=1$ なら $\arctan t$, $n\geq 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\displaystyle\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$: 変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int\frac{dt}{t^n}$ に帰着

8–2. **冪根 (平方根など) を含む積分.** 不定積分 (原始関数) が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
  $\to$ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$ ($\sqrt{1\text{ 次式 }2\text{ 種類}}$) の有理式の積分
  $\to$ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{ 次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
  $\to y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{ 次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
  ($\sqrt{3\text{ 次式又は }4\text{ 次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。)

8–3. **三角関数の有理関数の積分.** $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

9. 演習問題

問 9–1. $a,b\in\boldsymbol{R}, a>0$ として、次の積分 I,J を求めよう。

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\ dx,\qquad J=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\ dx$$

(1) 部分積分して I,J の間の関係式を求め (2 つ得られる)、それから I,J を求めよ。
(2) (参考) $I+iJ$ を考えて Euler の公式を用い、指数法則・積分公式が複素数に対しても形式的に成立するとして計算し (実際に適切な定式化の下で成立するのだが)、$I+iJ$ を求め、その実部・虚部を上で得た結果と比較せよ。

問 9–2. $\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を求めよう。

(1) $\sin^n x=\sin x\ \sin^{n-1}x$ と見て部分積分することにより、I_n, I_{n-2} の関係式を求めよ。
(2) 初期値 I_0, I_1 を求めて、I_n を求めよ。

問 9–3. $\displaystyle I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ が満たす漸化式を求めよう。

(1) $1+x^2=t$ と置換することにより、$\displaystyle\int\frac{x}{(1+x^2)^n}dx$ を求めよ。
(2) $\displaystyle\frac{1}{(1+x^2)^n}-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}=x\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$ と見て部分積分することにより、I_n-I_{n+1} を I_n で表し、I_n, I_{n+1} の関係式を求めよ。

問 9–4. $\displaystyle y=\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ について、定積分 $\displaystyle I(a)=\int_0^a\arcsin x\ dx$ $(0\leq a\leq 1)$ を次の 2 通りで求めてみよう。

(1) $\arcsin x=(x)'\arcsin x$ と見て部分積分して求めよ。
(2) 長方形領域 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq a, 0\leq y\leq\arcsin a\}$ は $y=\arcsin x$ のグラフによって 2 つの領域に分かれる。この各領域の面積を考えることによって求めよ。