前回の演習の答案の返却

前回提出の答案を

学生番号順に

返却します

元気に返事をして取りに来て下さい

前回の演習の答案へのコメント

- 読める答案を書く
  「答案は (数式交じりの) 文章である」
  - ⋆ 読める字で書く
  - ⋆ 読みとれる論理で書く
    - ∗ 「…とする」のか、「…となる」のか
    - ∗ 必要条件か十分条件か
    - ∗ 等式・不等式の根拠は何か
- 技術的なコメントは細かくなるので略

演習問題 1：

関数 $f(x) = x^2$ **において、**x **を** -4 **に近付けると** $f(x)$ **は** 16 **に近付くようだが、その誤差について、**

(1) $|f(x) - 16| < 0.1$ **となるためには、**x **をどの程度** -4 **に近付ければ良いか (つまり、**

$$|x - (-4)| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 16| < 0.1$$

と言えるためには、δ **の値をどれくらいにすれば良いか)。**

(2) $|f(x) - 16| < 0.0001 = \frac{1}{10000}$ **となるためには？**

(3) **一般に、**ε **を任意の正の数として、**

$$|f(x) - 16| < \varepsilon$$

となるためには、δ **の値をどれくらいにすれば良いか。**

普通はこの演習問題のようには聞かないで、次の形で問われるだろう

「関数 $f(x) = x^2$ が $x = -4$ で連続であることを示せ」

より一般には、

「関数 $f(x) = x^2$ が (全ての実数 a に対し $x = a$ で) 連続であることを示せ」

ε-δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = b\right)$$

ということを、次で定義する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の連続の定義

関数 f **が** $x = a$ **で連続であるとは、**

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

この定義の下で、

「関数 $f(x)=x^2$ が

(全ての実数 a に対し $x=a$ で)

連続であること」

を証明してみよう

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の極限の定義

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$
$$\overset{\leftarrow}{\iff} (\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

この定義の下で、例えば次のことが証明出来る：

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c \\ &\qquad\Longrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c \end{aligned}}$$

極限

良く判らないものを、良く判るもので近似する

無限	$\longrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longrightarrow$	**離散量** **(digital)**

極限

良く判らないものを、良く判るもので近似する

無限	$\longleftrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longleftrightarrow$	**離散量** **(digital)**

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

(冪級数・整級数)

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

(冪級数・整級数)

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

(冪級数・整級数)

一般に、関数 f について、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

一般に、関数 f について、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

一般に、関数 f について、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}
$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**

$$
\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}
$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ **: f の 形式的 Taylor 展開**

(形式的)Taylor 展開を計算してみよう!!

直接判る例：

- **多項式関数： そのまま**
  (だけど面白い例もある)
- **高階微分 $f^{(n)}(x)$ が良く判る場合：**
  $\sin x, \cos x, e^x$ **など**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ **: f の 形式的 Taylor 展開**

(形式的)Taylor 展開を計算してみよう!!

直接判る例：

- **多項式関数： そのまま**
  (だけど面白い例もある)
- **高階微分 $f^{(n)}(x)$ が良く判る場合：**
  $\sin x, \cos x, e^x$ **など**

二項定理

$$(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n$$

$$= 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2}x^2 + \cdots + x^N$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = {}_N C_n$$

: **二項係数 (binomial coefficient)**

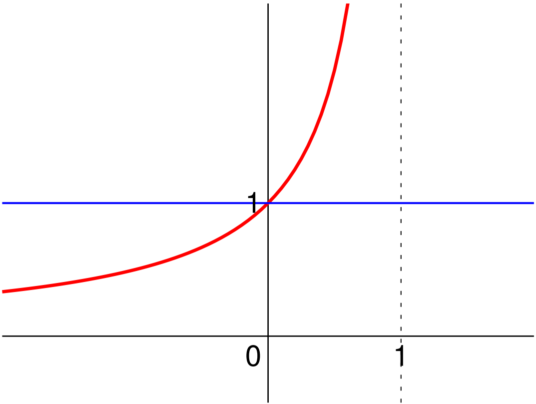
指数関数・三角関数

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\
&= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots
\end{aligned}
$$

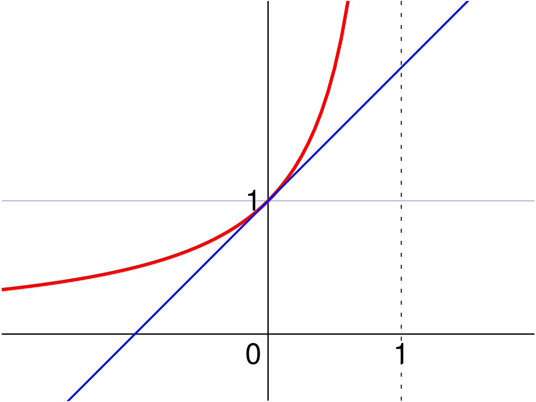
Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
  - $\star$ 近似値の計算
  - $\star$ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

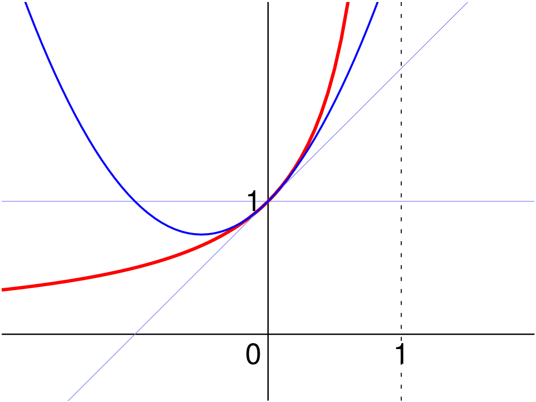
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



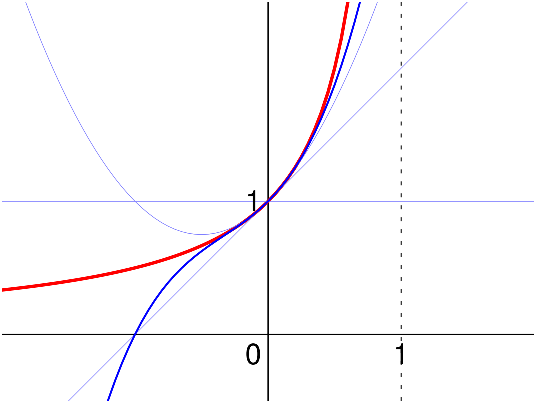
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



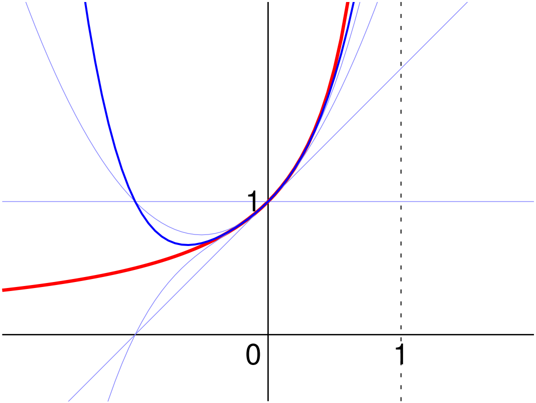
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



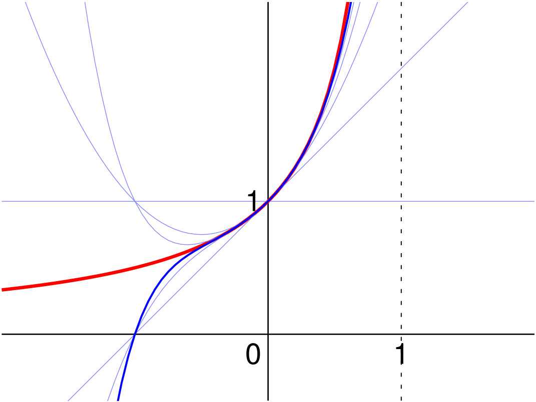
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} = ?$ $\qquad e^{0.02} = \exp(0.02) = ?$

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$

Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} = ?$ $\qquad e^{0.02} = \exp(0.02) = ?$

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$

Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} =$ **?** $\qquad e^{0.02} = \exp(0.02) =$ **?**

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$ **?**

問題：

(1) $f(x) = \sin x$ **の Taylor 展開を求めよ。**

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$ **を求めよ。**

(b) $\sin 1$ **の近似値を小数第** 4 **位まで求めよ。**