中間試験のお知らせ

6月11日(月) 13:30 〜 15:00

3-227教室 (ここ)

- Taylor展開を巡る諸々
  (前の週(6/4)の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

<u>比較判定法</u> (良く判っている級数と比較)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **: 収束** $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **: 収束**
- $\sum a_n$ **: 発散** $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ **: 発散**

  - **途中からでも良い**
    ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可)**
  - **定数倍しても良い**
    ($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ **でも可)**

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq C b_n$ **でも可**

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から "隣との比" r を取り出すには？

- **漸化式:** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** (a_n) **に対しても、**

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \text{収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ 収束
- $r > 1 \Longrightarrow$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \textbf{収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\textbf{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

演習問題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n3^n x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ **に対し、**

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

で、$r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない !!

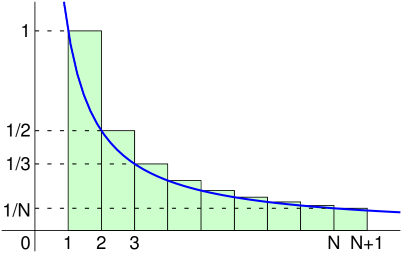
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

例：調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \to +\infty \ (N \to \infty)$$



冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ が収束する } x \text{ の範囲は？}$$

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
  $\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup\{|x_0| \mid \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束}\}$
  ：収束半径 (radius of convergence)

冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ が収束する } x \text{ の範囲は？}$$

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束 $\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束

- $r := \sup\{|x_0| \mid \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束}\}$: **収束半径 (radius of convergence)**

収束半径

$$r := \sup\left\{ |x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: **収束半径 (radius of convergence)**

- $|x| < r \implies$ **絶対収束**
- $|x| > r \implies$ **発散**

- **全ての実数** x **に対し収束** $\cdots$ $r = \infty$ **(便宜上)**
- $x = 0$ **でしか収束しない** $\cdots$ $r = 0$

注： $|x| = r$ **では、収束・発散ともにあり得る**

収束半径

$$r := \sup\left\{|x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束}\right\}$$

: **収束半径 (radius of convergence)**

- $|x| < r \implies$ **絶対収束**
- $|x| > r \implies$ **発散**

- **全ての実数** x **に対し収束** $\cdots$ $r = \infty$ **(便宜上)**
- $x = 0$ **でしか収束しない** $\cdots$ $r = 0$

注： $|x| = r$ **では、収束・発散ともにあり得る**

収束半径

$$r := \sup\left\{|x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束}\right\}$$

：**収束半径 (radius of convergence)**

- $|x| < r \Longrightarrow$ **絶対収束**
- $|x| > r \Longrightarrow$ **発散**

- **全ての実数** x **に対し収束** $\cdots\ r = \infty$ **(便宜上)**
- $x = 0$ **でしか収束しない** $\cdots\ r = 0$

注： $|x| = r$ **では、収束・発散ともにあり得る**

比テスト (d'Alembert の判定法)：

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\textbf{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

n 乗根テスト (Cauchy の判定法)：

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\textbf{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

s^{-1}：**収束半径**

さて、今日は、ここからは、

大学の数学の講義らしく

ちゃんと定理の証明をします。

本講義では、中間試験後にもう一回、
ちゃんと定理の証明をする回がある予定

さて、今日は、ここからは、

大学の数学の講義らしく

ちゃんと**定理の証明**をします。

本講義では、中間試験後にもう一回、
ちゃんと定理の証明をする回がある予定

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？

$\longrightarrow$ “Taylor の定理”

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？**

$\longrightarrow$ **"Taylor の定理"**

Taylor 展開の剰余項

“形式的” Taylor 展開

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) = f(x)$$

であるか？

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

$$R_N(f;x) := f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

: n **次の剰余項 (remainder)**

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

$$R_N(f;x) := f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

: n 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$|R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

$\longrightarrow$ **剰余項** $R_N(f;x)$ **の評価 (estimate) が問題**

Taylor の定理

f : N **回微分可能 (**$N \geq 1$**)**

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

系

(1 つ取って固定した x に対して)

$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$

$\Longrightarrow |R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow \infty)$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

注

$N = 1$ **のときは、何を言っているのか？**

$$0 < \exists\theta < 1 : R_1(f; x) = f'(\theta x)x$$

つまり

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x)$$

$\cdots$ **(Lagrange の) 平均値の定理**

Taylor の定理 $\cdots$ 平均値の定理の高次版

注

$N = 1$ **のときは、何を言っているのか？**

$$0 < \exists\theta < 1 : R_1(f; x) = f'(\theta x)x$$

つまり

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x)$$

$\cdots$ **(Lagrange の) 平均値の定理**

$\boxed{\textbf{Taylor の定理} \cdots \textbf{平均値の定理の高次版}}$

Taylor の定理の証明の方針

平均値の定理を 次々と繰り返し用いて
次数を上げていく

数学的帰納法 の形で証明を記述すると明快

“帰納法の仮定” を f' に 適用
($(f', N-1) \Longrightarrow (f, N)$ の流れ)

Taylor の定理の証明の方針

平均値の定理を 次々と繰り返し用いて
次数を上げていく

数学的帰納法 の形で証明を記述すると明快

“帰納法の仮定” を f' に 適用
($(f', N-1) \Longrightarrow (f, N)$ の流れ)

Taylor の定理の証明の方針

平均値の定理を 次々と繰り返し用いて
次数を上げていく

数学的帰納法 の形で証明を記述すると明快

“帰納法の仮定” を f' に 適用
($(f', N-1) \Longrightarrow (f, N)$ の流れ)

Taylor の定理の証明の方針

簡潔な証明のためには、

「平均値の定理」を少し一般化しておく必要有り
(Cauchy の平均値の定理)

ここでは、その元になる基本的な

「Rolle の定理」

から見ていこう

Rolle の定理

f : **閉区間** $[a,b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$ **で連続**

開区間 $(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$ **で微分可能**

$f(a)=f(b)$

$$\Longrightarrow \qquad \exists c \in (a,b) : f'(c)=0$$

Rolle の定理 (証明の概略)

f : $[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能、$f(a) = f(b)$
$\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

- $[a, b]$ で連続な関数には最大値・最小値が存在
  $\longleftarrow$ 実数の基本性質が必要
- 最大値・最小値を取る点 $x = c$ で $f'(c) = 0$
  $\longleftarrow$ 微分係数の定義

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

で、分母分子の符号を見よ

Cauchy の平均値の定理

f, g **: 共に 閉区間** $[a, b]$ **で連続**
閉区間 (a, b) **で微分可能**

- $\not\exists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\Longrightarrow \qquad \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

注: $g(x) = x$ **の時が Lagrange の平均値の定理**

Cauchy の平均値の定理

f, g : 共に 閉区間 $[a, b]$ で連続
閉区間 (a, b) で微分可能

- $\not\exists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\Longrightarrow \qquad \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

注: $g(x) = x$ **の時が Lagrange の平均値の定理**

Cauchy の平均値の定理 (証明の舞台裏)

f, g **: 共に** $[a, b]$ **で連続、** (a, b) **で微分可能**

- $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Rolle の定理で見付かる $h'(c) = 0$ **となる** c **が**
所望の c **になるような関数** h **が作れれば良い**

$$(g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0$$

$$h'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - (f(b) - f(a))g'(x)$$

となる h **を考えよう**

Cauchy の平均値の定理 (証明の舞台裏)

f, g : 共に $[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能

- $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$ • $g(a) \neq g(b)$

$$\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Rolle の定理で見付かる $h'(c) = 0$ となる c が所望の c になるような関数 h が作れれば良い

$$(g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0$$

$$h'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - (f(b) - f(a))g'(x)$$

となる h を考えよう

Taylor の定理

f: N 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

系

(1 つ取って固定した x に対して)

$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$

$\Longrightarrow R_N(f; x) \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow \infty)$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Taylor の定理 (証明の方針)

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

数学的帰納法：“帰納法の仮定” を f' に 適用
($(f', N-1) \Longrightarrow (f, N)$ の流れ)

準備： $R_N(f;0) = 0$, $\quad R'_N(f;x) = R_{N-1}(f';x)$

Cauchy の平均値の定理を用いて次数を上げていく

作戦：Cauchy の平均値の定理の f, g をどう取る？

演習問題

$f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f;x)$ について、

(1) $|R_N(f;1)| < 10^{-4}$ となる
(出来ればなるべく小さい) N を与えよ

(2) e の近似値を小数第 3 位まで求めよ

(3) 誤差が 10^{-3} 以下であることを保証せよ
(丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ)

意欲のある人は小数第 5 位まで求めてみよう
(その場合、(1) に当たる部分はどうすれば良い？)