

中間試験のお知らせ

6月11日(月) 13:30 ~ 15:00

3-227 教室 (ここ)

- Taylor 展開を巡る諸々
(前の週 (6/4) の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n : \text{収束} \implies \sum a_n : \text{収束}$
- $\sum a_n : \text{発散} \implies \sum b_n : \text{発散}$

- 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

- 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq Cb_n$ でも可

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から “隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式: $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

演習問題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n3^n x^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

で、 $r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない !!

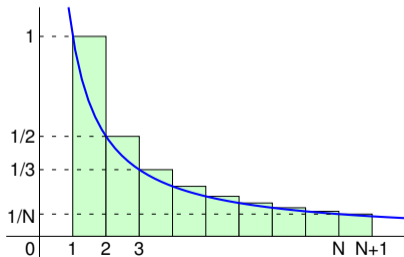
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

例：調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が収束する x の範囲は？

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
 $\implies |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup \{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \}$
: 収束半径 (radius of convergence)

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散

- 全ての実数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る

比テスト (d'Alembert の判定法) :

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$ 収束
- $|x| > s^{-1} \implies$ 発散

n 乗根テスト (Cauchy の判定法) :

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$ 収束
- $|x| > s^{-1} \implies$ 発散

s^{-1} : 収束半径

さて、今日は、ここからは、

大学の数学の講義らしく

ちゃんと**定理の証明**をします。

本講義では、中間試験後にもう一回、
ちゃんと定理の証明をする回がある予定

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
行なってよいか？

→ “Taylor の定理”

Taylor 展開の剰余項

“形式的” Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) = f(x)$$

であるか？

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$



$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

: n 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



$$|R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

→ 剰余項 $R_N(f; x)$ の評価 (estimate) が問題

Taylor の定理

$f : \mathbb{N}$ 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

系

(1 つ取って固定した x に対して)

$$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall \theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$$

$$\implies |R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

注

$N = 1$ のときは、何を言っているのか？

$$0 < \exists \theta < 1 : R_1(f; x) = f'(\theta x)x$$

つまり

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x)$$

… (Lagrange の) 平均値の定理

Taylor の定理 … 平均値の定理の高次版

Taylor の定理の証明の方針

平均値の定理を 次々と繰り返し用いて
次数を上げていく

数学的帰納法 の形で証明を記述すると明快

“帰納法の仮定” を f' に適用
 $((f', N - 1) \implies (f, N)$ の流れ)

Taylor の定理の証明の方針

簡潔な証明のためには、

「平均値の定理」を少し一般化しておく必要有り
(Cauchy の平均値の定理)

ここでは、その元になる基本的な

「Rolle の定理」

から見ていこう

Rolle の定理

f : 閉区間 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で連続

开区間 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ で微分可能

$$f(a) = f(b)$$

$$\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Rolle の定理 (証明の概略)

$f : [a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能、 $f(a) = f(b)$
 $\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

- $[a, b]$ で連続な関数には最大値・最小値が存在
← 実数の基本性質が必要
- 最大値・最小値を取る点 $x = c$ で $f'(c) = 0$
← 微分係数の定義

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

で、分母分子の符号を見よ

Cauchy の平均値の定理

f, g : 共に 閉区間 $[a, b]$ で連続
開区間 (a, b) で微分可能

- $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\implies \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

注: $g(x) = x$ の時が **Lagrange** の平均値の定理

Cauchy の平均値の定理 (証明の舞台裏)

f, g : 共に $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能

- $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$ • $g(a) \neq g(b)$

$$\implies \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Rolle の定理で見付かる $h'(c) = 0$ となる c が
所望の c になるような関数 h が作れば良い

$$(g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0$$

$h'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - (f(b) - f(a))g'(x)$
となる h を考えよう

Taylor の定理

f : N 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

系

(1 つ取って固定した x に対して)

$$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall \theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$$

$$\implies R_N(f; x) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Taylor の定理 (証明の方針)

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

数学的帰納法 : “帰納法の仮定” を f' に適用
($(f', N-1) \implies (f, N)$ の流れ)

準備 : $R_N(f; 0) = 0$, $R'_N(f; x) = R_{N-1}(f'; x)$

Cauchy の平均値の定理を用いて次数を上げていく

作戦 : Cauchy の平均値の定理の f, g をどう取る?

演習問題

$f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、

- (1) $|R_N(f; 1)| < 10^{-4}$ となる
(出来ればなるべく小さい) N を与えよ
- (2) e の近似値を小数第 3 位まで求めよ
- (3) 誤差が 10^{-3} 以下であることを保証せよ
(丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ)

意欲のある人は小数第 5 位まで求めてみよう
(その場合、(1) に当たる部分はどうすれば良い?)