本講義後半の主題は、

積分

である

積分法

- **統一的な求積法としての「定積分」**
- **積分の上端を動かして、積分値を上端の関数とみる**

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ **:「定積分関数」**

- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

積分の定義

仮定：

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：有界閉区間**
- **被積分関数** $f : I$ **で有界**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ： **区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ ： **各小区間 ($i = 1, \ldots, n$)**

$\delta(\Delta) := \max_i (x_i - x_{i-1})$ ： **分割の最大幅**

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$
$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

： **区間 I_i に於ける f の下限・上限**

積分の定義

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

: 分割 Δ に関する上下からの見積もり

$\longrightarrow$

$$s_\Delta \leq \text{“面積”} \leq S_\Delta$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow\ s := \sup_{\Delta} s_{\Delta}\ \textbf{:}\ \textbf{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow\ S := \inf_{\Delta} S_{\Delta}\ \textbf{:}\ \textbf{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない !!

積分の定義

$s = S$ のとき、これが “面積” と呼ぶべき唯一の値

この時、

f は I で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_a^b f(x)dx \quad \left(\text{または} \int_I f(x)dx\right)$$

と書いて、

f の I に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$ **とし、**

区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$$
$$S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$$

従って、

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ が 区間 } [a,c],[c,b] \text{ で積分可能} \\ \Longrightarrow f \text{ は区間 } [a,b] \text{ でも積分可能で、} \\ \qquad \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{array}}$

Darboux の定理：

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$：**分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$

(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

$$\Updownarrow$$

任意の $\varepsilon > 0$ **に対し、**
$[a, b]$ **の或る分割** $\Delta = \Delta_\varepsilon$ **が存在して、**

$$I - \varepsilon < s_\Delta, \qquad S_\Delta < I + \varepsilon$$

定理 **(連続関数の積分可能性)：**

f **：閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
(このとき自動的に有界)

$$\Downarrow$$

f **：** I **に於いて積分可能**

$s(x, y)$：区間 $[x, y]$ に於ける下積分

特に、$s(x) := s(a, x)$ と書くとき

主張：

$s(x)$：$[a, b]$ で微分可能で、

$$s'(x) = f(x)$$

即ち、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$$

$$0 < |h| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

定理：

f：**閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
(このとき自動的に有界)

$$\Downarrow$$

f：I **に於いて積分可能**

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)dt$$

(上端 x **の関数で、定積分関数と呼ぶ)**
が f **の原始関数になっていることが判る**

微分積分学の基本定理

f **: 閉区間** $I = [a, b]$ **で連続のとき**

- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

  即ち、 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ **とおくと、**

  F **は** f **の原始関数 (の一つ)**

- F **を** f **の原始関数 (の一つ) とすると、**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない (下端を指定しない) とき、

単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、

f **の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶ**

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f **: 連続のとき、　不定積分** $=$ **原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **で、**

$x = 1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- **積分区間が半開区間** $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$
- **しかもそこで被積分関数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **が非有界**

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

広義積分・変格積分 (improper integral)

- **区間が有界で、端点で関数が非有界**
  例： $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- **区間が非有界 (無限区間)**
  例： $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$\longrightarrow$ **共に、収束・発散の判定が重要**

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

f : $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ で定義され、
$x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
$[a, b - \varepsilon] = \{x | a \leq x \leq b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a,b)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

と書く (広義積分が収束する とも言う)

区間が非有界 (無限区間) な場合

f : $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の (どんな大きい) $M > a$ に対しても、
$[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x)dx$$

が定義される

区間が非有界 (無限区間) な場合

この状況で、

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a,+\infty)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$$

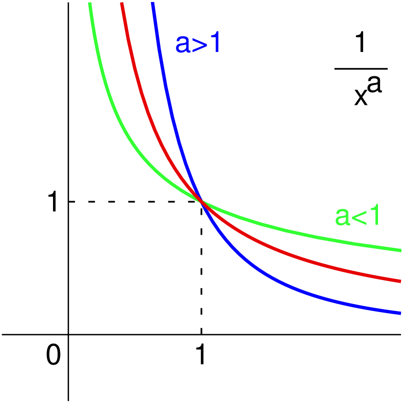
と書く (広義積分が収束する とも言う)

広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \geq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定 (の例)



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$\alpha > 1 \Longrightarrow$ **収束**

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$\alpha < 1 \Longrightarrow$ **収束**