期末試験のお知らせ

7月30日(月) 13:30 ～ 15:00

4-175教室 (ここじゃない)

- 積分を巡る諸々
  (最終回 (7/23) の講義内容まで)
- 中間試験前の内容も一部関連
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

補講(質問会)のお知らせ

7月21日(土) 13:30 〜 15:00

3-227 教室 (いつもと同じ)

- 自習・勉強会・質問会
- 講義内容は進まない
- 試験範囲は拡げない
- 出席は義務としない
- 途中入退室自由
- 質問がなければ途中で帰る

広義積分・変格積分 (improper integral)

我々は元々、次の仮定の下で定積分を定義した：

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：** **有界閉区間**
- **被積分関数** $f : I$ **で** **有界**

$\longrightarrow$ **次のような場合にも積分の定義を拡張しよう**

- **区間が有界で、端点で関数が非有界**

  例： $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- **区間が非有界 (無限区間)**

  例： $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

  $\longrightarrow$ **共に、収束・発散の判定が重要**

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

f : $[a, b) = \{x | a \le x < b\}$ で定義され、
$x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
$[a, b - \varepsilon] = \{x | a \le x \le b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, b)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

と書く (広義積分が収束する とも言う)

区間が非有界 (無限区間) な場合

f : $[a, +\infty) = \{x \big| a \le x\}$ で定義され、
任意の (どんな大きい) $M > a$ に対しても、
$[a, M] = \{x \big| a \le x \le M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x)dx$$

が定義される

区間が非有界 (無限区間) な場合

この状況で、

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, +\infty)$ **で****広義積分可能****と言い、**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

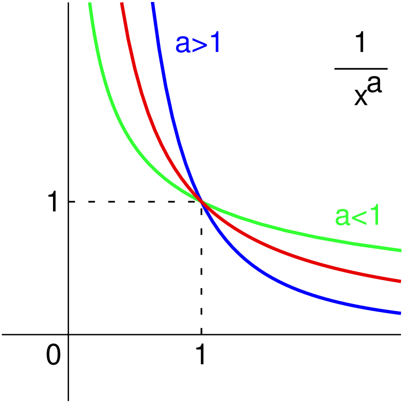
と書く (<u>広義積分が収束する</u> とも言う)

広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \geq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定 (の例)



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \Longrightarrow$ **収束**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \Longrightarrow$ **収束**

広義積分の収束判定 (の例)

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1+\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$$ **: 収束**

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1-\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_0^{1} f(x)dx$$ **: 収束**

注意: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ **は収束するとは言わない**

$\longrightarrow [-1,0)$ **と** $(0,1]$ **とに分けて** **<u>別々に</u>** **考える：**

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = -\log\varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \to +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'}\frac{dx}{x} = \log\varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \to +0)$$

なので、 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x},\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ **はどちらも収束しない**

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$ ：Γ 関数

(ガンマ関数)

- 広義積分は $s > 0$ で収束
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

広義積分で定義される関数の例

$$B(s,t) = \int_0^1 x^s(1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

: B 関数

(ベータ関数)

- **広義積分は** $s > 0, t > 0$ **で収束**
- $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

積分の計算法

微分積分学の基本定理：
f：連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

積分の計算法

しかし、(微分と違って)

良く知っている関数でも

不定積分 (原始関数) が
(原理的に) 計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」
の公式が存在しない!!

積分の計算法

しかし、(微分と違って)

良く知っている関数でも

不定積分 (原始関数) が
(原理的に) 計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」
の公式が存在しない!!

例：不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ **は、**

- **有理関数・三角関数・指数関数**
  および、それらの逆関数の

- **有限回の合成で作れる関数**

(初等関数という) の範囲に収まらないことが
証明されている

要は、

出来るものしか出来ない

ので、個別のテクニックを追っても切りがない。

そこで、個別の例は
公式集などを参照すれば良いことにして、

ここでは、
“原理的に計算できる例”
を幾つか紹介する

“原理的に計算できる” 不定積分の例

- **有理関数**
- $\sqrt[n]{1\text{ 次式}}$ **1 種類**
- $\sqrt{2\text{ 次式}}$ **1 種類**
- $\sqrt{1\text{ 次式}}$ **2 種類**
- **三角関数の有理関数**

有理関数の不定積分の基本形

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}dx = \log|x-a|$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$
- $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ **は難しいが、出来る (部分積分して n についての漸化式を作る)**

部分分数分解

多項式 $f(X), g(X)$ **が互いに素 (共通因数なし)**
のとき

$$\frac{\text{多項式}}{f(X)g(X)} = \frac{\text{多項式}}{f(X)} + \frac{\text{多項式}}{g(X)}$$

の形に書ける

部分分数分解

実数係数多項式 $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ **は、**

実数係数の範囲で、

$$f(X) = f_1(X)^{n_1} \cdot \cdots \cdot f_k(X)^{n_k}$$

(各 f_i **は** <u>1 **次式**</u> **または** <u>**実根なしの** 2 **次式**</u>**)**

と因数分解される

$\longrightarrow$ **有理関数の積分はさっきの基本形に帰着**

演習問題

有理関数

$$f(x) = \frac{7x^2+6x-5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

の不定積分を計算したい。

(1) $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2+2x+5}$ を満たす定数 a, b, c, d を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。