今までの主なレポート課題の例 (12/18 配布)

問 1. 授業の 1 回目に紹介した「思い浮かべた 3 桁の数を 2 つ並べて 6 桁の数を作り、それが 7 で割れれば $\cdots$」という小遊びの別バージョンを作れ。(数学的に別なものでも、別の演出でも良い。)

問 2. 中国の数学書「孫子算経」や日本の江戸時代の数学書である吉田光由「塵劫記」に、現在では「中国式剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)」と呼ばれる定理に相当する問題とその解法が掲載されている。これを調べ、その解法を現代の数学の言葉で説明せよ。

問 3. 2 整数 $a, b \in \boldsymbol{Z}$ に対し、その最大公約数 $d := \gcd(a, b)$ を求める Euclid の互除法、および、それと同時に $ax + by = d$ となる整数 $x, y \in \boldsymbol{Z}$ を求める拡張互除法についてまとめると共に、何らかの計算機言語 (表ソフトのマクロなどでも良い) で実装せよ。

問 4. 合同式の理論は、次のように "剰余類のなす世界" $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ を構成することによって、明快に論ずることが出来る。1 以上の整数 m を一つ取って固定し、整数全体の集合 Z 上の関係 $\sim$ を次で定める :

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists t \in \boldsymbol{Z} : a - b = tm.$$

(1) $\sim$ が $\boldsymbol{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。$a \in \boldsymbol{Z}$ の属する同値類 (剰余類とも言う) を $\overline{a}$ と書こう。$\overline{a}$ は具体的にはどのような集合か。この関係 $\sim$ による商集合を $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ と書く。
(2) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の加法を $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$ で定めると well-defined であることを示せ。
(3) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の乗法を $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$ で定めると well-defined であることを示せ。
(4) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の加法・乗法に関する結合律・可換律・分配律を示せ。

問 5. 大きな素数を探す候補として、しばしば次のような数が考察される。自然数 n に対し、$F_n := 2^{2^n} + 1$ を **Fermat 数**と呼ぶ。

(1) 自然数 m が奇数ならば、多項式 $X^m + 1$ は整数係数の範囲で既約でない (因数分解される) ことを示せ。
(2) 自然数 m に対し、$2^m + 1$ が素数ならば、$m = 2^n$ の形 (即ち $2^m + 1 = 2^{2^n} + 1$ が Fermat 数) であることを示せ。
(3) $n \leq 4$ のときは F_n は素数であるが、F_5 は素数でない。
(4) 異なる n に対する Fermat 数は、どの 2 つも互いに素であることを示せ。
(5) F_n の素数判定・素因数分解の研究や計算の現状について調べよ。

問 6. 素数 p に対し、$M_p := 2^p - 1$ を **Mersenne 数**と呼ぶ。

(1) 自然数 m に対し、多項式 $X^m - 1$ は $X - 1$ で割り切れることを示せ。
(2) 自然数 m に対し、$2^m - 1$ が素数ならば、m が素数 (即ち $2^m - 1$ が Fermat 数) であることを示せ。
(3) 小さい素数 p については M_p が素数であることも多いが、M_p が素数でないこともある。両方の例を挙げよ。
(4) M_p の素数判定・素因数分解の研究や計算の現状について調べよ。

問 7. 自然数の構成に関する **Peano の公理系**について調べて述べよ。

問 8. 自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ から 整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ を次で構成する。

(1) $X := \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ に関係 $\sim$ を次で定義すると、同値関係である :

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a_1 + b_2 = b_1 + a_2$$

$\boldsymbol{Z} := X/\!\sim$ とし、$(a_1, b_1) \in X$ の同値類を $[a_1, b_1] \in \boldsymbol{Z}$ と書く。
(2) $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] := [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$ により well-defined に $\boldsymbol{Z}$ の加法が定まる。しかるべき性質を示せ。
(3) $\boldsymbol{Z}$ の乗法をしかるべく定義し、しかるべき性質を示せ。
(4) $\boldsymbol{Z}$ の大小関係をしかるべく定義し、しかるべき性質を示せ。

問 9. 整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ から有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ を構成する方法を授業中に解説したが、それに引き続き、加法・乗法・大小関係の定義、しかるべき性質の証明など、一連のことを行なえ。($\boldsymbol{Z}$ に関する諸性質を既知として、$\boldsymbol{Q}$ に関する諸性質を導く。)

問 10. Newton-Raphson 法により、$n=2,3,\ldots$ などについて、

(1) $\sqrt{n}$ の近似値を小数第 8 位くらいまで求めよ。

(2) $k=3,4,\ldots$ などについて、$\sqrt[k]{n}$ の近似値を小数第 8 位くらいまで求めよ。

(必要なら電卓・表ソフトなどを用いよ。長い桁数が扱えないなら、小数第 6 位くらいまででもよろしい。プログラミングの心得がある人は、プログラムと実行結果を提出しても良い。計算の途中経過も適宜表示させること。)

問 11. 有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ から実数の集合 $\boldsymbol{R}$ を構成する方法として、**Cauchy 列**を用いる方法・**Dedekind の切断**を用いる方法などがある。この方法について調べて述べよ。

問 12. 方程式の代数解法 (係数から四則演算と冪根とを有限回用いて解を表す公式) の探求について、数学的・歴史的なことを含めて調べて述べよ。

問 13. n 次多項式 $f(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n$ に対し、その根を (重複度を込めて) $w_1,\ldots,w_n$ とする。根の差積の平方

$$D(f):=\prod_{1\leq i<j\leq n}(w_i-w_j)^2$$

を f の**判別式 (discriminant)** という。

(1) 根 $w_1,\ldots,w_n$ を用いた f の因数分解を考えることにより、n 次多項式の根と係数の関係を求めよ。特に 3 次多項式 $f(X)=X^3+pX+q$ の場合はどうなるか。

(2) 判別式 $D(f)$ は根の対称式であるので、基本対称式で表して根と係数の関係を用いることにより、f の係数で表せる。$f(X)=X^3+pX+q$ の場合に $D(f)$ を具体的に p,q で表せ。

(3) Fontana-Cardano の公式の 3 乗根の中に現れる平方根の中身と $D(f)$ とを比べよ。

問 14. 上問の結果より、実数を係数とする 3 次方程式が 3 つの実数解を持つとき、その解の公式には負数の平方根が必ず現れる。これを「不還元の場合 (Casus Irreducibilis)」と呼び、これが歴史上で複素数 (虚数) を扱った (扱わざるを得なかった) 最初と言われている。このことを含めて、複素数に関して数学的・歴史的なことを含めて調べて述べよ。

問 15. 4 次多項式 $f(X)=X^4+pX^2+qX+r$ の根を $w_1,\ldots,w_4$ とし、

$$t_1:=w_1w_4+w_2w_3,\qquad t_2:=w_1w_3+w_2w_4,\qquad t_3:=w_1w_2+w_3w_4$$

とおく。

(1) t_1,t_2,t_3 を根とする 3 次多項式 $g(T)$ を作り、その係数を f の係数 p,q,r で表せ。

(2) Ferrari の解法で現れる f の 3 次分解式と、上の $g(T)$ とを比べよ。

レポート提出について

- 締切：**2013 年 2 月 4 日 (月)20 時頃**まで
- 内容：配布プリントのレポート課題の例のような内容、及び授業に関連する内容で、授業内容の理解または発展的な取組みをアピールできるようなもの
- 分量：プリントのレポート課題を全部提出する必要はなく、問題の重さによって適宜判断して数問取り組めば良い。内容に関しては、このプリントの例に必ずしも拘らず、意欲的な取組みを望む。
- 授業最終回までに今後の分のレポート課題の例を配布する予定。