

2012 年度秋期

数の世界

(担当: 角皆)

今日の話題：

3 次方程式・4 次方程式の一般解法 (解の公式)

って知ってますか？

→ 方程式の解法探求の歴史

→ まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう
(人間と数学の歴史を振り返る)

小学校：

- 自然数 (正の整数) の $+$ \times
- $-$ は出来ない時がある
- \div は商と余りとを求める (整除)
- 分数を用いた \div (正の有理数)
- 小数 (近似値・正の実数)

中学・高校：

- 正負の数の四則 ($+$ $-$ \times \div)
- 文字式 (多項式) の $+$ $-$ \times
- \div は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の $-$ \div \longrightarrow 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

ところで …

大学で数学を習ったら

何が新しく出来るようになる？

中学・高校：

- 正負の数の四則 ($+$ $-$ \times \div)
- 文字式 (多項式) の $+$ $-$ \times
- \div は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の $-$ \div \longrightarrow 1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算 (余りを求める)



Gröbner 基底

(広中-Buchberger の algorithm)

多変数多項式環の **ideal** の標準的な生成系を
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 \longrightarrow (一般には高次の) 1 変数方程式へ
(変数消去)

ここでは、

3次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
(紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ (非整数も OK)
- (正数の範囲の) 引き算は OK
- 解も正の数のみ

2次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

→ 以下は別個に扱われた。 $(a > 0, b > 0)$

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

(→ 負の数は人間にとって考え難い?!)

3次方程式の解法(根の公式)は？

「**根の公式**」とは：

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算(小数)

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
(但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見たいこう。

(以下、暫く板書で)

3 次方程式の根の公式 (Fontana-Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて $-\frac{p}{3}$ となるように取る)

3乗根の1組を u, v とすると、($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

演習問題

3 次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

- (1) 因数分解を見付けて解け。
- (2) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。
また両者の結果を比べよ。