

2013 年度秋期

代数学 III(ガロア理論)(SIC64800) 期末試験(担当: 角皆)
実施: 2014 年 1 月 29 日(水), 11:00 ~ 12:30, 3-223 教室 持込: 不可

1. 一般的な諸注意

- 学生証または「臨時学生証(定期試験用)」を机上に提示すること。
- 入室は試験開始後 20 分まで認める。退室は試験開始後 30 分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷(白色かそれに近いもので無地)・時計(電卓機能等のないもの)のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞆の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始の指示があるまでは、問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに学生番号・名前を答案用紙に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 答案用紙の 2 枚目以降が必要な場合は挙手して申し出ること。2 枚目以降にも学生番号・名前の記入を忘れずに。また、全ての用紙に何枚目中の何枚目かを記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。

2. 問題について

- 問題番号の順に解答する必要はないが、どこがどの問題か明確に判るようにすること。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。

2013年度秋期

代数学 III(ガロア理論)(SIC64800) 期末試験(担当: 角皆)

問1. 3次方程式 $X^3 - 12X - 34 = 0$ を解け。

問2. 体の拡大 L/K において、

- (1) L の元 x が K 上代数的であることの定義を述べよ。
- (2) 拡大 L/K が代数的であることの定義を述べよ。
- (3) 拡大 L/K の次数 $[L:K]$ の定義を述べよ。
- (4) 拡大次数 $[L:K]$ が有限であれば、拡大 L/K は代数的であることを示せ。

問3. 有限次拡大 L/K の中間体 M に対し、 $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ を M の K 上の基底、 $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ を L の M 上の基底とする。 $\mathcal{Z} := (x_1y_1, \dots, x_1y_m, \dots, x_ny_1, \dots, x_ny_m) = (x_iy_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ が L の K 上の基底を成すことを示したい。

- (1) \mathcal{Z} が K 上の線型独立系であることを示せ。
- (2) \mathcal{Z} が L の K -線型空間としての生成系であることを示せ。
- (3) 以上で \mathcal{Z} が L の K 上の基底を成すことが示されたが、このことから体拡大 $L/K, L/M, M/K$ の拡大次数の間に成立する関係式を記せ。

問4. $x = \sqrt{8 + 2\sqrt{17}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ について、

- (1) x の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f(X) := \text{Irr}(x; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を求めよ。
- (2) x の \mathbb{Q} 上の共役をすべて挙げよ。
- (3) f の根体 $K := \mathbb{Q}(x)$ は \mathbb{Q} 上正規でないことを示せ。
- (4) K の \mathbb{Q} 上の正規閉包 \tilde{K} 、及びその拡大次数 $[\tilde{K}:\mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (5) \tilde{K}/\mathbb{Q} の中間体を全て挙げよ。

問5. 次の体拡大は Galois 拡大ではない。理由を簡潔に述べよ。

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$
- (2) $\mathbb{F}_p(T)/\mathbb{F}_p(T^p)$ (p は素数、 T は \mathbb{F}_p 上超越的)

問6. (本問を解答する場合には次問は解答する必要はない。)

$\zeta = \zeta_7 := e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$ について、実は $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ である。

- (1) ζ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $\Phi_7(X) := \text{Irr}(\zeta; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$ 及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (2) $K_7 := \mathbb{Q}(\zeta_7)$ の \mathbb{Q} 上の Galois 群 $G := \text{Gal}(K_7/\mathbb{Q})$ の構造を明らかにせよ。
- (3) $\omega = \omega_7 := \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (4) $\alpha := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (5) G の部分群と K_7/\mathbb{Q} の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、各中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

問7. (前問が難しい場合には本問を解答せよ。)

$\zeta = \zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$ について、実は $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ である。

- (1) ζ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $\Phi_5(X) := \text{Irr}(\zeta; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$ 及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (2) $K_5 := \mathbb{Q}(\zeta_5)$ の \mathbb{Q} 上の Galois 群 $G := \text{Gal}(K_5/\mathbb{Q})$ の構造を明らかにせよ。
- (3) $\omega = \omega_5 := \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (4) G の部分群と K_5/\mathbb{Q} の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

以上