

2013年度後期 代数3 期末試験 (担当: 角皆)

実施: 2014年1月27日(月), 10:40 ~ 12:10, 14-717B教室

問1. 3次方程式 $X^3 + 30X - 15 = 0$ を解け。

問2. 体の拡大 L/K において、

- (1) L の元 x が K 上代数的であることの定義を述べよ。
- (2) 拡大 L/K が代数的であることの定義を述べよ。
- (3) 拡大 L/K の次数 $[L:K]$ の定義を述べよ。
- (4) 拡大次数 $[L:K]$ が有限であれば、拡大 L/K は代数的であることを示せ。

問3. 次の体拡大は Galois 拡大ではない。理由を簡潔に述べよ。

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$
- (2) $F_p(T)/F_p(T^p)$ (p は素数、 T は F_p 上超越的)

問4. (本問を解答する場合には次問は解答する必要はない。)

$\zeta = \zeta_7 := e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$ について、実は $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ である。

- (1) ζ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $\Phi_7(X) := \text{Irr}(\zeta; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$ 及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (2) $K_7 := \mathbb{Q}(\zeta_7)$ の \mathbb{Q} 上の Galois 群 $G := \text{Gal}(K_7/\mathbb{Q})$ の構造を明らかにせよ。
- (3) $\omega = \omega_7 := \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (4) $\alpha := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (5) G の部分群と K_7/\mathbb{Q} の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、各中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

問5. (前問が難しい場合には本問を解答せよ。)

$\zeta = \zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$ について、実は $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ である。

- (1) ζ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $\Phi_5(X) := \text{Irr}(\zeta; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$ 及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (2) $K_5 := \mathbb{Q}(\zeta_5)$ の \mathbb{Q} 上の Galois 群 $G := \text{Gal}(K_5/\mathbb{Q})$ の構造を明らかにせよ。
- (3) $\omega = \omega_5 := \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式及び \mathbb{Q} 上の共役を求めよ。
- (4) G の部分群と K_5/\mathbb{Q} の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

問6. $L := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \zeta_5)$ は \mathbb{Q} 上の Galois 拡大である。 L/\mathbb{Q} の Galois 群を $G := \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ とし、 $\sigma, \tau \in G$ を次で与える:

$$\sigma : \begin{cases} \sqrt[5]{3} \mapsto \sqrt[5]{3} \\ \zeta_5 \mapsto \zeta_5^2, \end{cases} \quad \tau : \begin{cases} \sqrt[5]{3} \mapsto \zeta_5 \sqrt[5]{3} \\ \zeta_5 \mapsto \zeta_5. \end{cases}$$

- (1) $f(X) = X^5 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体が L に等しいことを示せ。
- (2) σ, τ の位数を求めよ。
- (3) $\sigma\tau$ を $\tau^i \sigma^j$ の形で表せ。
- (4) L の \mathbb{Q} 上の拡大次数 $[L:\mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (5) $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ であることを示せ。
- (6) G の部分群と L/\mathbb{Q} の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。

以上