2013 年度後期

代数３

（教育学部数学科）

（担当：角皆）

Galois 理論

- 方程式の解け方の様子

- 体拡大の様子

を Galois 群によって計る

授業概要

今までの代数系科目を踏まえて、
体論およびガロア理論について講義する。

体論の基礎事項について復習・補充をした後、

ガロア理論の基本定理を紹介し、

基本的な例として
有限体・円分体・クンマー拡大などに触れ、

併せて古典的な問題意識として
方程式の解法理論や作図問題との関連にも
時間があれば触れたい。（シラバスより）

本講義の概要・予定

- 古典的な方程式論（3 次・4 次方程式の根の公式）
- 体論の基礎事項の復習
  （代数拡大・拡大次数・正則表現
  ・ノルム・トレースなど）
- 共役・正規拡大・標数・有限体・分離拡大
- 体拡大の自己同型群・ガロア拡大・ガロア群
- ガロア理論の基本定理・ガロア対応・計算例
- 円分体・有限体のガロア理論・巡回クンマー拡大
- 方程式のべき根による解法・古典的作図問題など

さて、初めに $\cdots$

3 **次方程式・**4 **次方程式の一般解法（解の公式）**

って知ってますか？

$\longrightarrow$ **方程式の解法探求の歴史**

$\longrightarrow$ **まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう**
（人間と数学の歴史を振り返る）

小学校：

- **自然数（正の整数）の＋×**
- **−は出来ない時がある**
- **÷は商と余りとを求める（整除）**
- **分数を用いた÷（正の有理数）**
- **小数（近似値・正の実数）**

中学・高校：

- **正負の数の四則（＋－×÷）**
- **文字式（多項式）の＋－×**
- **÷は分数式（有理式）として**
- 1 **変数の整除（商と余り）**
- **数の－÷** $\longrightarrow$ 1 **次方程式**
- 2 **次方程式の根の公式**
- **簡単な連立方程式**
- 3 **次以上は因数分解出来れば解ける**

ところで $\cdots$

大学で数学を習って

新しく出来るようになったことってある？

中学・高校：

- **正負の数の四則（＋－×÷）**
- **文字式（多項式）の＋－×**
- **÷は分数式（有理式）として**
- 1 **変数の整除（商と余り）**
- **数の－÷** $\longrightarrow$ 1 **次方程式**
- 2 **次方程式の根の公式**
- **簡単な連立方程式**
- 3 **次以上は因数分解出来れば解ける**

多変数多項式の割り算（余りを求める）

$\Downarrow$

Gröbner 基底

（広中-Buchberger の algorithm）

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 $\longrightarrow$（一般には高次の）1 変数方程式へ
（変数消去）

ここでは、

3 次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2 次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
（紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法）

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ（非整数も OK）
- （正数の範囲の）引き算は OK
- 解も正の数のみ

2 次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた** ($a > 0, b > 0$)

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった

（$\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い?!）

3 次方程式の解法（根の公式）は？

「根の公式」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
（但し、まだ略記法に近い）
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見ていこう

（以下、暫く板書で）

3 次方程式の根の公式（Fontana-Cardano の公式）

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ **の根は、**

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

（但し、3 **乗根は掛けて** $-\dfrac{p}{3}$ **となるように取る）**

3 **乗根の** 1 **組を** u, v **とすると、**($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

4 次方程式の解法の発見（16 世紀前半，Ferrari）

3 次方程式の解法から間もなく

- 時代が熟していた？
  （考察の蓄積・記号法の発達など）

- 難しさの違いが少ない？
  $\longrightarrow$ “難しさ” ってどう計る ？

（以下、暫く板書で）