

代表的な計算モデル

- 有限オートマトン (有限状態機械)
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q : 有限集合 … 状態の集合
- Σ : 有限集合 … 入力文字の集合 : “**alphabet**”
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: 遷移関数
- $s \in Q$ … 初期状態
- $F \subset Q$ … 受理状態の集合

語・言語

Σ : 入力文字の有限集合 … **alphabet**

入力は Σ の元の有限列 (**語, word**)

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n \quad (a_i \in \Sigma)$$

その全体 Σ^*

$$\Sigma^* := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n \quad (\Sigma^0 = \{\varepsilon\} : \text{空列})$$

言語 (language) : Σ^* の部分集合

言語 $A \subset \Sigma^*$ に属する語 $w \in A$

… 言語 A に於いて “文法に適っている”

有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が
語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ を**受理 (accept)** する



$\exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q :$

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ ($i = 1, \dots, n$)
- $r_n \in F$

$L(M) : M$ が受理する語の全体 $\subset \Sigma^*$
... M が**認識 (recognize)** する言語

M は言語 $L(M)$ の“文法”で、
 M が受理する語は“文法に適っている”

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
A を認識する有限オートマトン M
が存在するか？
- 有限オートマトンによって
認識可能な言語はどのようなものか？

→ 正規言語・正規表現

語の演算

語 $v = a_1 \cdots a_k, w = b_1 \cdots b_l \in \Sigma^*$ に対し

$$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

: 連結・連接 (**concatnation**)

連接演算により Σ^* は単位的自由半群を成す

$S = (S, \cdot) : \text{半群 (semigroup)}$



$\cdot : S \times S \longrightarrow S : \text{二項演算で結合律を満たす}$

正規演算

言語 $A, B \subset \Sigma^*$ に対し、

- $A \cup B := \{w \mid w \in A \text{ または } w \in B\}$
: 和集合演算
- $AB = A \circ B := \{vw \mid v \in A, w \in B\}$
: 連結 (接続) 演算
- $A^* := \{w_1 w_2 \cdots w_n \mid n \geq 0, w_i \in A\}$
: star 演算

(言語全体の集合 $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ 上の演算)

正規表現 (regular expression)

- 空集合記号 \emptyset は正規表現
- 空列記号 ε は正規表現
- 各文字 $a \in \Sigma$ は正規表現
- 正規表現 R, S に対し
($R \cup S$) は正規表現 ($(R|S)$ とも書く)
- 正規表現 R, S に対し
($R \circ S$) は正規表現 ((RS) とも書く)
- 正規表現 R に対し R^* は正規表現
- 以上のものだけが正規表現

… 帰納的導出による定義

正規言語 (regular language)

正規表現 R に対し、言語 $L(R)$ を次で定める：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$ ($a \in \Sigma$)
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

正規表現で表される言語 …… **正規言語**

問：

前回の演習問題で与えられた言語

$$(1) A = \{a^{2n}b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$$

$$(2) B = \{vabbaaw \mid v, w \in \Sigma^*\}$$

を正規表現で表せ

(定める正規言語が上の A, B であるような
正規表現を与えよ)

演習問題： Σ を alphabet とする。以下を記述せよ。

(1) L : 言語

- (a) 文字 $a \in \Sigma$ に対し、語に左 (resp. 右) から文字 a を接続させる写像 l_a (resp. r_a)
- (b) 語 $w \in \Sigma^*$ に対し、語に左 (resp. 右) から文字列 w を接続させる写像 l_w (resp. r_w) (語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で)
- (c) 語 $w \in \Sigma^*$ の後に接続すると L の元になる語全体の成す集合 $S_L(w)$ を与える写像 S_L

(2) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$: 有限オートマトン

- (a) 状態 $q \in Q$ にいる所から出発して語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後の状態 $\tilde{\delta}(q, w)$ を与える写像 $\tilde{\delta}$ (語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で)
- (b) 特に、 M が語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後の状態を与える写像 $\tilde{\delta}_0$
- (c) M が認識する言語 $L(M)$
- (d) より一般に、語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後に、続けて読めば受理される語全体の成す集合 $S_M(w)$ を与える写像 S_M

定理 :

L : 正規言語



L が或る有限オートマトンで認識される

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

… **非決定性有限オートマトン**
(Non-deterministic finite automaton)

「非決定性」とは … あてずっぽう有り

状態の遷移先を一意に決めない
(幾つかあって分岐していく)

→ どれかが受理すれば OK!!

- 手分けをして誰かが受理出来れば良い
- どの道を辿れば良いか知っていて、
受理が検証出来れば良い

と考えることも出来る

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q : 有限集合 … 状態の集合
- Σ : 有限集合 … **alphabet**, $\Sigma_\epsilon := \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$: 遷移関数
… 可能な遷移先全体の集合を与える
- $s \in Q$ … 初期状態
- $F \subset Q$ … 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ を受理する



$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q :$$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ ($i = 1, \dots, n$)
- $r_n \in F$

$L(M)$: M が受理する語の全体

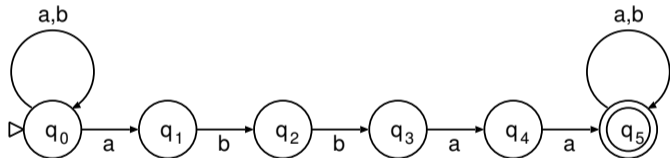
… M が認識する言語

非決定性有限オートマトンによる語の受理

- $r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon)$ とは、
「入力を読まずに
状態 r_{i-1} から状態 r_i に移って良い」
ということ
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = \emptyset$ (矢印が出ていない)
ということもある
→ 受理されない分岐の
行き止まりに入ってしまった
→ 他の分岐が生きていれば問題無し

非決定性有限オートマトンの例

(状態遷移図による表示)



定理 :

L : 正規言語



L が或る非決定性有限オートマトンで
認識される

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

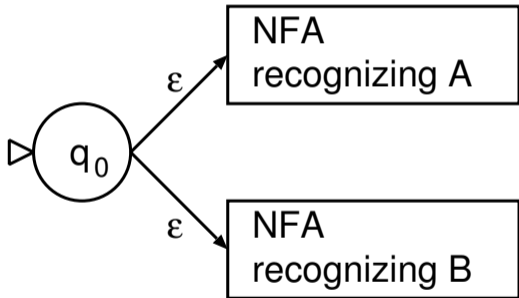
正規言語を認識する NFA の構成

正規言語 :

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

- (1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
- (2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成



DFA と NFA との同等性

定理 :

L が或る (決定性) 有限オートマトンで
認識される



L が或る非決定性有限オートマトンで
認識される

非決定性有限オートマトン M に対し、

$L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン \widetilde{M} が
構成できる

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ に対し、

$L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン

$\tilde{M} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ を構成

アイデア :

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？