代表的な計算モデル

- 有限オートマトン（有限状態機械）
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q **: 有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ **: 有限集合** $\cdots$ **入力文字の集合: "alphabet"**
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ **: 遷移関数**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**

有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **が**

語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ **を受理 (accept) する**

$$\Updownarrow$$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$ **:** M **が受理する語の全体** $\subset \Sigma^*$

$\cdots$ M **が認識 (recognize) する言語**

M **は言語** $L(M)$ **の "文法" で、**

M **が受理する語は "文法に適っている"**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- **言語** $A \subset \Sigma^*$ **に対し、**
  A **を認識する有限オートマトン** M
  が存在するか？

- **有限オートマトンによって**
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

正規演算

言語 $A, B \subset \Sigma^*$ に対し、

- $A \cup B := \{w | w \in A$ または $w \in B\}$

  ：和集合演算
- $AB = A \circ B := \{vw | v \in A, w \in B\}$

  ：連結（連接）演算
- $A^* := \{w_1 w_2 \cdots w_n | n \geq 0, w_i \in A\}$

  ：star 演算

（言語全体の集合 $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ 上の演算）

正規表現 (regular expression)

- 空集合記号 $\emptyset$ は正規表現
- 空列記号 ε は正規表現
- 各文字 $a \in \Sigma$ は正規表現

- 正規表現 R, S に対し
  $(R \cup S)$ は正規表現（$(R|S)$ とも書く）
- 正規表現 R, S に対し
  $(R \circ S)$ は正規表現（(RS) とも書く）
- 正規表現 R に対し R^* は正規表現

- 以上のものだけが正規表現

$\cdots$ 帰納的導出による定義

正規言語 (regular language)

正規表現 R に対し、言語 $L(R)$ を次で定める：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$ **(**$a \in \Sigma$**)**
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

正規表現で表される言語 $\cdots$ **正規言語**

定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ **非決定性有限オートマトン**
(Non-deterministic finite automaton)

「非決定性」とは $\cdots$ **あてずっぽう有り**

状態の遷移先を一意に決めない
（幾つかあって分岐していく）

$\longrightarrow$ **どれかが受理すれば OK!!**

- **手分けをして誰かが受理出来れば良い**
- **どの道を辿れば良いか知っていて、受理が検証出来れば良い**

と考えることも出来る

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q **：有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ **：有限集合** $\cdots$ **alphabet,** $\quad \Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ **：遷移関数**
  $\cdots$ **可能な遷移先全体の集合を与える**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ **を受理する**

$$\Updownarrow$$

$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \cdots a_n$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$ **:** M **が受理する語の全体**

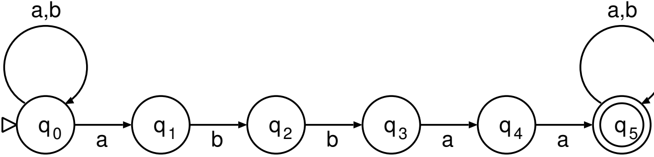
$\cdots$ M **が認識する言語**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

- $r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon)$ とは、
  「入力を読まずに
  状態 r_{i-1} から状態 r_i に移って良い」
  ということ

- $\delta(r_{i-1}, a_i) = \emptyset$（矢印が出ていない）
  ということもある
  $\longrightarrow$ 受理されない分岐の
  行き止まりに入ってしまった
  $\longrightarrow$ 他の分岐が生きていれば問題無し

非決定性有限オートマトンの例（状態遷移図による表示）



定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る**非決定性**有限オートマトンで認識される

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

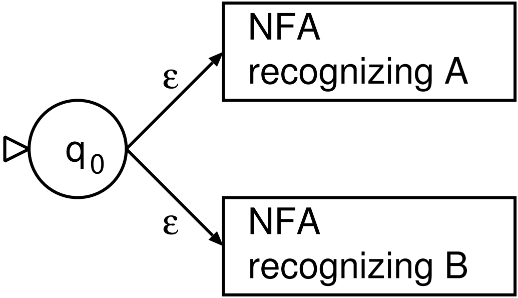
正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

(1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
(2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成



DFA と NFA との同等性

定理：

L が或る（決定性）有限オートマトンで認識される

$\Updownarrow$

L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

非決定性有限オートマトン M に対し、

$\mathrm{L}(\mathrm{M})$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{\mathrm{M}}$ が構成できる

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$ **に対し、**

$L(M)$ **を認識する決定性有限オートマトン**

$$\widetilde{M} = (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$$ **を構成**

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

DFA と NFA との同等性

定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る（決定性）有限オートマトンで認識される**

$\Updownarrow$

L **が或る（非決定性）有限オートマトンで認識される**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

非決定性有限オートマトンで認識でき**ない**
言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$$\iff \text{“待ち” が有限種類}$$

$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ ： **“左平行移動”**

$$v \longmapsto wv$$

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ ： **“待ち” の集合**

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \,|\, wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\mathrm{Im} S_L < \infty \iff \exists M : L = L(M)$$