有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$\Longleftrightarrow$ **“待ち” が有限種類**

$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ **：“左平行移動”**

$$v \longmapsto wv$$

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **：“待ち” の集合**

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \,|\, wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\mathrm{Im}S_L < \infty \Longleftrightarrow \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない言語が存在する!!

（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例： $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **（a と b との個数が同じ）**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い

Pumping Lemma（注入補題・反復補題）

正規言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in A, |w| \geq n$:

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz$

(1) $y \neq \varepsilon$
(2) $|xy| \leq n$
(3) $\forall k \geq 0 : xy^k z \in A$

有限オートマトンで認識できる／ない言語の例

$\Sigma = \{a, b\}$

- a と b との個数が同じ
- a が幾つか続いた後に b が幾つか続いたもの
- a で始まり a, b が交互に並んで b で終わる
- 同じ文字列 2 回の繰返しから成る
- 回文 (palindrome)

などなど

このうちで、

有限オートマトンで認識できる言語は？

有限オートマトンで認識できない言語が存在する

より強力な計算モデルが必要

- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンで認識できない言語が存在する

より強力な計算モデルが必要

- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンで認識できない言語が存在する

⇓

有限オートマトンより強力な計算モデル

⇓

正規言語より広い範囲の言語を扱う

⇓

生成規則による言語の記述（生成文法）

有限オートマトンで認識できない言語が存在する

⇓

有限オートマトンより強力な計算モデル

⇓

正規言語より広い範囲の言語を扱う

⇓

生成規則による言語の記述（生成文法）

例：“文法に適っている” 数式とは どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

$\longrightarrow$ これは式を作り出す規則とも考えられる

例：“文法に適っている” 数式とは どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

$\longrightarrow$ これは式を作り出す規則とも考えられる

例：“文法に適っている” 数式とは
どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- **単独の文字（変数名）は式**
- **式と式とを演算子で繋いだものは式**
- **式を括弧で括ったものは式**
- **それだけ**

$\longrightarrow$ これは式を作り出す規則とも考えられる

“文法に適っている” 数式

初期記号（開始変数）E から出発して、
次の規則のいづれかを
“非決定的に” 適用して得られるもの のみ

- $\mathrm{E} \to \mathrm{A}$
- $\mathrm{E} \to \mathrm{EBE}$
- $\mathrm{E} \to (\mathrm{E})$
- $\mathrm{A} \to$ **変数名のどれか**
- $\mathrm{B} \to$ **演算子のどれか**
- **変数名・演算子・$($ ・ $)$ は**
  それ以上書換えない（終端記号）

$\longrightarrow$ **生成規則（書換規則）**

“文法に適っている” 数式

初期記号（開始変数）E から出発して、
次の規則のいづれかを
“非決定的に” 適用して得られるもの のみ

- $\mathrm{E} \to \mathrm{A}$
- $\mathrm{E} \to \mathrm{EBE}$
- $\mathrm{E} \to (\mathrm{E})$
- $\mathrm{A} \to$ **変数名のどれか**
- $\mathrm{B} \to$ **演算子のどれか**
- **変数名・演算子・$($ ・ $)$ は**
  それ以上書換えない（終端記号）

$\longrightarrow$ **生成規則（書換規則）**

生成規則・生成文法

生成規則を与えることでも
言語を定めることが出来る

$\longrightarrow$ **生成文法 (generative grammar)**

生成規則による “文法に適っている” 語の生成

- **初期変数を書く**
- **今ある文字列中の或る変数を**
  生成規則のどれかで書換える
- **変数がなくなったら終わり**

生成規則・生成文法

生成規則を与えることでも
言語を定めることが出来る

$\longrightarrow$ **生成文法** (**generative grammar**)

生成規則による “文法に適っている” 語の生成

- 初期変数を書く
- 今ある文字列中の或る変数を
生成規則のどれかで書換える
- 変数がなくなったら終わり

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$

（a が偶数個（0 個も可）続いた後に、b が奇数個続く）

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \rightarrow aaS$
- $S \rightarrow bB$
- $B \rightarrow bbB$
- $B \rightarrow \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \rightarrow aaS|bB$
- $B \rightarrow bbB|\varepsilon$

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$

（a が偶数個（0 個も可）続いた後に、b が奇数個続く）

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \rightarrow aaS$
- $S \rightarrow bB$
- $B \rightarrow bbB$
- $B \rightarrow \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \rightarrow aaS|bB$
- $B \rightarrow bbB|\varepsilon$

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} | n, m \geq 0\}$

（a が偶数個（0 個も可）続いた後に、b が奇数個続く）

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \rightarrow aaS$
- $S \rightarrow bB$
- $B \rightarrow bbB$
- $B \rightarrow \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \rightarrow aaS|bB$
- $B \rightarrow bbB|\varepsilon$

生成規則・生成文法

実際の（自然言語を含めた）“文法”では、
或る特定の状況で現われた場合だけ
適用できる規則もあるだろう

そのような生成規則は例えば次の形：

- $u A v \to u w v$

$u, v \in \Sigma^*$：文脈 (context)

変数 A が uAv の形で現われたら、
語 $w \in \Sigma^*$ で書換えることが出来る

生成規則・生成文法

実際の（自然言語を含めた）“文法” では、
或る特定の状況で現われた場合だけ
適用できる規則もあるだろう

そのような生成規則は例えば次の形：

- $u A v \to u w v$

$u, v \in \Sigma^*$：**文脈 (context)**

変数 A が uAv の形で現われたら、
語 $w \in \Sigma^*$ で書換えることが出来る

生成文法の形式的定義

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

- V：有限集合（**変数**の集合）
- Σ：有限集合（**終端記号**の集合）
  ここに $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R：有限集合 $\subset (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$
  （**規則**の集合）
- $S \in V$：**開始変数**

$(v, w) \in R$ が生成規則 $v \to w$ を表す

文脈自由文法 (context-free grammar)

文脈が全て空列 ε

即ち、規則が全て $A \to w$ $(A \in V)$ の形

文脈自由文法の形式的定義

- V：有限集合（変数の集合）
- Σ：有限集合（終端記号の集合）
  ここに $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R：有限集合 $\subset V \times (V \cup \Sigma)^*$ （規則の集合）
- $S \in V$：開始変数

$(A, w) \in R$ が生成規則 $A \to w$ を表す

文脈自由文法 (context-free grammar)

文脈が全て空列 ε

即ち、規則が全て $A \to w$ $(A \in V)$ **の形**

文脈自由文法の形式的定義

- V : **有限集合（変数の集合）**
- Σ : **有限集合（終端記号の集合）**
  ここに $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R : **有限集合** $\subset V \times (V \cup \Sigma)^*$ **（規則の集合）**
- $S \in V$: **開始変数**

$(A, w) \in R$ **が生成規則** $A \to w$ **を表す**

例：言語 $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ は 正規言語ではないが文脈自由言語である

- $S \to aSb|\varepsilon$

従って、

文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
$\cdots$ プッシュダウンオートマトン

例：言語 $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ は
正規言語ではないが文脈自由言語である

- $S \to aSb|\varepsilon$

従って、

文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
$\cdots$ プッシュダウンオートマトン

例：言語 $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ は
正規言語ではないが文脈自由言語である

- $S \to aSb|\varepsilon$

従って、

文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
$\cdots$ プッシュダウンオートマトン

例：言語 $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ は
正規言語ではないが文脈自由言語である

- $S \to aSb|\varepsilon$

従って、

文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
$\cdots$ プッシュダウンオートマトン

例：言語 $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ は
正規言語ではないが文脈自由言語である

- $S \to aSb|\varepsilon$

従って、

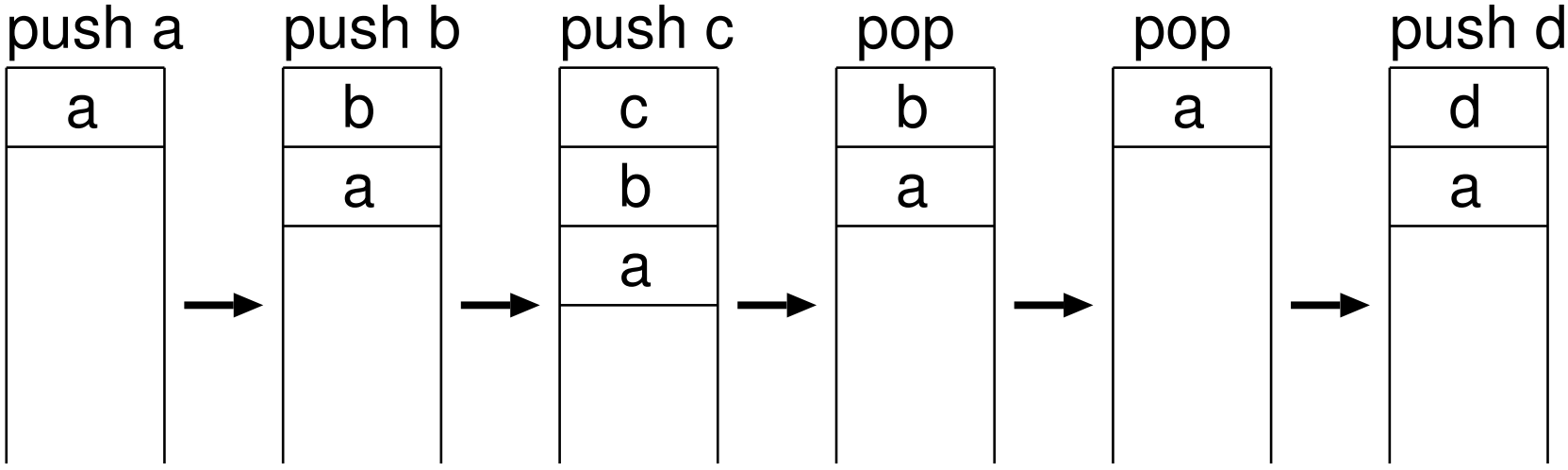
文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
$\cdots$ プッシュダウンオートマトン

プッシュダウンオートマトン

（非決定性）有限オートマトンに
プッシュダウンスタックを取り付けたもの



無限（非有界）の情報を保持できるが、
読み書きは先頭だけ
$\cdots$ LIFO (Last In First Out)

プッシュダウンオートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$$

- Q：**有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ：**有限集合** $\cdots$ **alphabet**
- Γ：**有限集合** $\cdots$ **stack alphabet**
  $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ **と置く**
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$
  ：遷移関数（非決定的） $\cdots$ **可能な遷移先全体**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

- $(r, y) \in \delta(q, a, x)$ **とは、**
  「入力 a **を読んだとき、**
  状態 q **でスタックの先頭が** x **なら、**
  スタックの先頭を y **に書換えて、**
  状態 r **に移って良い」**
  ということ (pop; push y)

- $x = y$ **は書き換え無し**
- $x = \varepsilon$ **は push のみ**
- $y = \varepsilon$ **は pop のみ**
- $a = \varepsilon$ **は入力を読まずに遷移**