定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

定理：

L：**文脈自由言語**

$\Updownarrow$

L **が或るプッシュダウンオートマトンで認識される**

本質的な違いは？

文脈自由言語は再帰 (recursion) を記述できる

文脈自由言語の例

回文全体の成す言語は文脈自由

- $S \to aSa|bSb|a|b|\varepsilon$

問：回文全体の成す言語を認識する
プッシュダウンオートマトンを構成せよ

文脈自由言語の Pumping Lemma

文脈自由言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in A, |w| \geq n$:

$\exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* : w = uvxyz$

(1) $vy \neq \varepsilon$ **(即ち** $v \neq \varepsilon$ **または** $y \neq \varepsilon$**)**

(2) $|vxy| \leq n$

(3) $\forall k \geq 0 : uv^k xy^k z \in A$

プッシュダウンオートマトンでは認識できない言語の例

同じ文字列 2 回の繰返しから成る文字列全体

$$A = \{ww | w \in \Sigma^*\}$$

入力を読み直せないのが弱点

$\longrightarrow$ より強力な計算モデルが必要

一つの方法としては、

入力を覚えておくために
プッシュダウンスタックをもう一つ
使えることにする

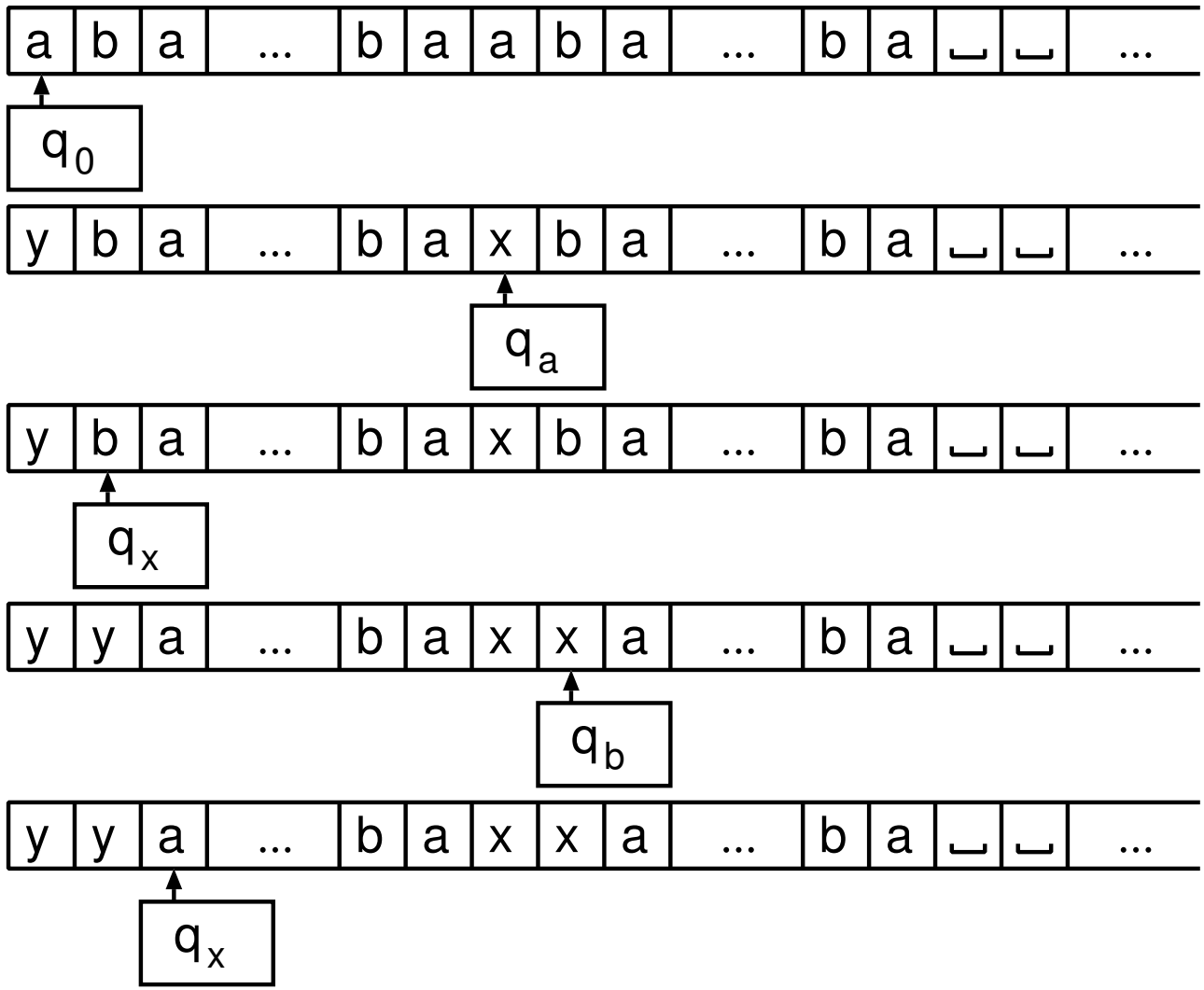
実際これで真により強い計算モデルが得られる

しかし、通常はこれと同等な
次のような計算モデルを考える
... チューリングマシン

チューリングマシン

- 有限個の内部状態を持つ
- 入力データはテープ上に一区画一文字づつ書き込まれて与えられる
- データを読み書きするヘッドがテープ上を動く
- 遷移関数は次の形：
  内部状態とヘッドが今いる場所の文字とによって、その場所の文字を書き換え、次の内部状態に移り、ヘッドを左か右かに動かす
- 受理状態または拒否状態に達したら停止するが、停止しないこともある

（非決定性）チューリングマシンによる言語 $A = \{ww | w \in \Sigma^*\}$ の認識



チューリングマシンによる言語の認識

チューリングマシン T が言語 A を認識する

$$\Updownarrow$$

$$A = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{r} \text{入力 } w \text{ に対し、} \\ \text{受理状態で停止する} \\ \text{遷移が存在} \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$w \in A \Longleftrightarrow$ **入力 w に対し、受理状態で停止する遷移が存在**

チューリングマシンによる言語の判定

チューリングマシン T が言語 A を判定する

$\Updownarrow$

T は A を認識し、
かつ、全ての入力に対し必ず停止する

$\Updownarrow$

$w \in A \Longleftrightarrow$ **入力 w に対し、受理状態で停止する遷移が存在**

かつ

$w \notin A \Longleftrightarrow$ **入力 w に対し、拒否状態で停止する遷移が存在**

Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

. . . 「アルゴリズム」の定式化

何故「チューリングマシン」なのか?

- およそ計算機で実行したいことは模倣可能
  （無限のメモリにランダムアクセスできる
  計算機モデル）

- 多少モデルを変更しても強さが同じ
  （モデルの**頑強性**）
  - ⋆ テープが両方に無限に伸びているか
  - ⋆ ヘッドが動かないことがあっても良いか
  - ⋆ 複数テープチューリングマシン
  - ⋆ 決定性／非決定性　　などなど

プログラム内蔵方式（von Neumann 型）

$\cdots$ プログラムもデータとして保持

$\longrightarrow$ 一つの機械で様々な計算を柔軟に実現

同様の働きをするチューリングマシン U が構成できる

$\cdots$ 万能チューリングマシン (universal Turing machine)

万能チューリングマシン

全てのチューリングマシンの動作を模倣する

- **入力：** $(\langle \mathrm{M} \rangle, w)$
  - $\star$ $\langle \mathrm{M} \rangle$**：機械** M **の符号化（プログラムに相当）**
  - $\star$ w**：** M **に与える入力データ**

- **出力：機械** M **が入力** w **を受理するかどうか**

定理

言語

$$A_{\mathrm{TM}} = \left\{ (\langle M \rangle, w) \,\middle|\, \begin{array}{l} \langle M \rangle : \textbf{TM } M \textbf{ の符号化} \\ M \textbf{ が入力 } w \textbf{ を受理} \end{array} \right\}$$

は認識可能だが、判定可能ではない**。**

証明は一種の対角線論法による
（Russell のパラドックス風）

対角線論法の例： Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ **とせよ**

$X \in X$ **であるか？**

- $X \in X$ **と仮定すると、定義より** $X \notin X$
- $X \notin X$ **と仮定すると、定義より** $X \in X$

$\longrightarrow$ **どちらにしても矛盾!!**