今日の話題：

3 次方程式・4 次方程式の一般解法（解の公式）

って知ってますか？

$\longrightarrow$ **方程式の解法探求の歴史**

$\longrightarrow$ **まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう**
（人間と数学の歴史を振り返る）

小学校：

- **自然数（正の整数）の＋×**
- **－は出来ない時がある**
- **÷は商と余りとを求める（整除）**
- **分数を用いた÷（正の有理数）**
- **小数（近似値・正の実数）**

中学・高校：

- **正負の数の四則（＋－×÷）**
- **文字式（多項式）の＋－×**
- **÷は分数式（有理式）として**
- **1 変数の整除（商と余り）**
- **数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式**
- **2 次方程式の根の公式**
- **簡単な連立方程式**
- **3 次以上は因数分解出来れば解ける**

ところで ···

大学で数学を習ったら

何が新しく出来るようになる？

中学・高校：

- **正負の数の四則（＋－×÷）**
- **文字式（多項式）の＋－×**
- **÷は分数式（有理式）として**
- 1 **変数の整除（商と余り）**
- **数の－÷** $\longrightarrow$ 1 **次方程式**
- 2 **次方程式の根の公式**
- **簡単な連立方程式**
- 3 **次以上は因数分解出来れば解ける**

多変数多項式の割り算（余りを求める）

$\Downarrow$

Gröbner 基底

（広中-Buchberger の algorithm）

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 $\longrightarrow$（一般には高次の）1 変数方程式へ（変数消去）

ここでは、

3 次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2 次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
（紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法）

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ（非整数も OK）
- （正数の範囲の）引き算は OK
- 解も正の数のみ

2 次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた** $(a > 0, b > 0)$

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった

（$\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い?!）

3 次方程式の解法（根の公式）は？

「根の公式」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半　(del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
（但し、まだ略記法に近い）
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見ていこう

（以下、暫く板書で）

3 次方程式の根の公式（Fontana-Cardano の公式）

$f(X)=X^3+pX+q=0$ の根は、

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

（但し、3 乗根は掛けて $-\dfrac{p}{3}$ となるように取る）

3 乗根の 1 組を u,v とすると、($\omega^2+\omega+1=0$)

$$X=u+v,\omega u+\omega^2 v,\omega^2 u+\omega v$$

演習問題

3 次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

(1) 因数分解を見付けて解け。

(2) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。
また両者の結果を比べよ。