2014 年度秋期

代数学 III(ガロア理論)(SIC64800)　期末試験 (担当：角皆)

実施：2015 年 1 月 29 日 (木), 11:00 〜 12:30, 1–102 教室　　　持込：不可

1. 一般的な諸注意

- 学生証または「臨時学生証 (定期試験用)」を机上に提示すること。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷 (白色かそれに近いもので無地) ・時計 (電卓機能等のないもの) のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞄の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始の指示があるまでは、問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まず初めに学生番号・名前を答案用紙に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 答案用紙の 2 枚目以降が必要な場合は挙手して申し出ること。2 枚目以降にも学生番号・名前の記入を忘れずに。また、全ての用紙に何枚目中の何枚目かを記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。

2. 問題について

- 問題番号の順に解答する必要はないが、どこがどの問題か明確に判るようにすること。
- **採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。**

2014 年度秋期
代数学 III(ガロア理論)(SIC64800)　期末試験 (担当：角皆)

問 1. 3 次方程式 $X^3+30X-15=0$ を解け。

問 2. 体の拡大 L/K において、

(1) L の元 x が K 上代数的であることの定義を述べよ。
(2) 拡大 L/K が代数的であることの定義を述べよ。
(3) 拡大 L/K の次数 $[L:K]$ の定義を述べよ。
(4) 拡大次数 $[L:K]$ が有限であれば、拡大 L/K は代数的であることを示せ。

問 3. 有限次拡大 L/K の中間体 M に対し、$\mathcal{X}=(x_1,\ldots,x_n)$ を M の K 上の基底、$\mathcal{Y}=(y_1,\ldots,y_m)$ を L の M 上の基底とする。$\mathcal{Z}:=(x_1y_1,\ldots,x_1y_m,\ldots,x_ny_1,\ldots,x_ny_m)=(x_iy_j)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ が L の K 上の基底を成すことを示したい。

(1) $\mathcal{Z}$ が K 上の線型独立系であることを示せ。
(2) $\mathcal{Z}$ が L の K-線型空間としての生成系であることを示せ。
(3) 以上で $\mathcal{Z}$ が L の K 上の基底を成すことが示されたが、このことから体拡大 $L/K, L/M, M/K$ の拡大次数の間に成立する関係式を記せ。

問 4. $x=\sqrt{8+2\sqrt{17}}\in\overline{\boldsymbol{Q}}$ について、

(1) x の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $f(X):=\mathrm{Irr}(x;\boldsymbol{Q})(X)\in\boldsymbol{Q}[X]$ を求めよ。
(2) x の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役をすべて挙げよ。
(3) f の根体 $K:=\boldsymbol{Q}(x)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上正規でないことを示せ。
(4) K の $\boldsymbol{Q}$ 上の正規閉包 $\widetilde{K}$、及びその拡大次数 $[\widetilde{K}:\boldsymbol{Q}]$ を求めよ。
(5) $\widetilde{K}/\boldsymbol{Q}$ の中間体を全て挙げよ。

問 5. 次の体拡大は Galois 拡大ではない。理由を簡潔に述べよ。

(1) $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})/\boldsymbol{Q}$
(2) $\boldsymbol{F}_p(T)/\boldsymbol{F}_p(T^p)$ (p は素数、T は $\boldsymbol{F}_p$ 上超越的)

問 6. (本問を解答する場合には次問は解答する必要はない。)
$\zeta=\zeta_7:=e^{\frac{2\pi i}{7}}\in\boldsymbol{C}$ について、実は $\zeta\in\overline{\boldsymbol{Q}}$ である。

(1) ζ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $\Phi_7(X):=\mathrm{Irr}(\zeta;\boldsymbol{Q})(X)\in\boldsymbol{Q}[X]$ 及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(2) $K_7:=\boldsymbol{Q}(\zeta_7)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群 $G:=\mathrm{Gal}(K_7/\boldsymbol{Q})$ の構造を明らかにせよ。
(3) $\omega=\omega_7:=\zeta+\zeta^{-1}=2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(4) $\alpha:=\zeta+\zeta^2+\zeta^4$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(5) G の部分群と $K_7/\boldsymbol{Q}$ の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、各中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

問 7. (前問が難しい場合には本問を解答せよ。)
$\zeta=\zeta_5:=e^{\frac{2\pi i}{5}}\in\boldsymbol{C}$ について、実は $\zeta\in\overline{\boldsymbol{Q}}$ である。

(1) ζ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $\Phi_5(X):=\mathrm{Irr}(\zeta;\boldsymbol{Q})(X)\in\boldsymbol{Q}[X]$ 及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(2) $K_5:=\boldsymbol{Q}(\zeta_5)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群 $G:=\mathrm{Gal}(K_5/\boldsymbol{Q})$ の構造を明らかにせよ。
(3) $\omega=\omega_5:=\zeta+\zeta^{-1}=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式及び $\boldsymbol{Q}$ 上の共役を求めよ。
(4) G の部分群と $K_5/\boldsymbol{Q}$ の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、中間体上の ζ の最小多項式を求めよ。

以上