

## レポート問題の例 (07/03 配布)

ここに挙げた問題に拘らず、授業中に証明を省略した命題・詳細を省略した内容や、授業で取り上げた内容の具体例など、または修士論文などで研究した内容で本授業に関連する内容などを、まとめてレポートとしても良い。

### 1. 体論・ガロア理論

体  $K$  に対し、特に断りがなければ、 $K$  を含む代数閉体  $\Omega$  を 1 つ取って固定し、 $\Omega$  内の  $K$  の代数閉包を  $\bar{K}$  とする。

問 1-1.  $\Omega$  に含まれる  $K$  の有限次拡大  $L/K$  に対し、不等式

$$\#\text{Aut}(L/K) \leq \#\text{Emb}_K(L, \Omega) \leq [L : K]$$

が成立することを示したい。

- (1)  $L/K$  が単拡大  $L = K(\alpha)$  の場合に、上の不等式を示せ。
- (2) 一般の有限次拡大  $L/K$  は単拡大の有限回の積み重ねになる。不等式の各辺に関する連鎖律を示すことにより、一般の場合の結果を導け。
- (3) 等号条件について吟味せよ。

問 1-2. 体  $K$  に対し、次を示せ。

- (1)  $\alpha, \beta \in \bar{K}$  で、 $\beta$  が  $K$  上分離的  $\implies L := K(\alpha, \beta)$  が  $K$  上の単拡大 ( $\exists \gamma \in \bar{K} : L = K(\gamma)$ )
- (2) 有限次分離拡大は単拡大。

問 1-3. 体  $K$  に対し、次を示せ。((1) の  $\implies$  だけが非自明で、あとは形式的)

- (1)  $\alpha \in \bar{K}$  が  $K$  上分離的  $\iff K(\alpha)/K$  が分離拡大
- (2)  $L_1, L_2 : K$  上分離的  $\implies L_1 L_2 : K$  上分離的

問 1-4.  $K = \mathbf{F}_p(x, y)$  ( $p$  元体上の 2 変数有理関数体) とし、その拡大  $L = \mathbf{F}_p(t, s)$  (ここに  $t^p = x, s^p = y$ ) を考える。

- (1)  $L/K$  は単拡大ではない。実際、 $L$  の任意の元  $\alpha \in L$  に対し、 $[K(\alpha) : K] = p$ 。
- (2)  $L/K$  には中間体が無限個あることを示せ。

問 1-5. ガロア拡大  $L/K$  に関する推進定理を示せ。

問 1-6. ガロア拡大  $L/K$  に関する正規底定理を示せ。

問 1-7. 無限次ガロア拡大  $L/K$  に対するガロア理論の基本定理について論ぜよ (ガロア群の位相やガロア対応など)。

### 2. 群のコホモロジー

以下、必ずしも可換とは限らない環  $R$  (特に群環  $Z[G]$ ) 上の左加群を考える。

問 2-1. ホモロジー代数の基本的な補題・性質について、内容を述べた上で示せ。

- (1) いわゆる「蛇補題 (snake lemma)」
- (2) いわゆる「五補題 (five lemma)」
- (3) いわゆる「Hom の左完全性」
- (4) いわゆる「 $\otimes$  の右完全性」

問 2-2. 余鎖複体 (cochain complex) の間の完全列からコホモロジー長完全列が引き起こることを示せ。

問 2-3. 2 次コホモロジー群  $H^2(G, A)$  が群拡大  $\mathcal{E} : 1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$  をパラメトライズすることを示せ。 $H^2(G, A)$  の群演算は、群拡大では何に対応するか。

---

#### レポート提出の要領

- 期日: 8 月 11 日 (月) まで
- 「レポート問題の例」にある問題、および本講義に関連する内容について考察した問題について、何問か (内容の重みによって分量は適宜判断せよ) を考察して提出。
- 提出: 数学領域事務室前廊下 (市谷本館 106 前) の角皆のメールポスト。