レポート問題の例 (07/10 配布)

3. ガロア理論の計算・ガロア群の構成

問 3–1. $f(X) \in K[X]$ を K 上の n 次 monic 多項式とし、その根を (重複度を込めて) $w_1, \ldots, w_n$ とする。根の差積の平方

$$D(f) := \prod_{1 \le i < j \le n} (w_i - w_j)^2$$

を f の**判別式 (discriminant)** という。

(1) f の微分 f' の根を $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (重根は重複度込みで考える) とするとき、

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(w_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} f(v_j).$$

(2) $f(X) = X^n - aX - b$ について判別式 $D(f)$ を求めよ。

問 3–2. 4 次二面体群 $D_4 = \langle \sigma, \tau | \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$ について、

(1) 全ての元を列挙し、それぞれの位数を答えよ。
(2) 全ての部分群を列挙し、それらの包含関係を図示せよ。
(3) D_4 は正方形の自己同型群なので、正方形の 4 頂点の集合に自然に作用する。これから得られる 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ への D_4 の埋込み (単射準同型) $D_4 \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$ を求めよ。
(4) 2 変数有理関数体 $K = \boldsymbol{Q}(a, b)$ 上の複二次式 $f(X) = X^4 + aX^2 + b \in K[X]$ について、$\mathrm{Gal}(f/K) = D_4$ であることを示せ。また、f の K 上の最小分解体 $L = \mathrm{Spl}(f/\boldsymbol{Q})$ の部分体を、D_4 の部分群と対応させて求めよ。

問 3–3. p を素数とする。H を p 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ の可移部分群とする。

(1) H は p 次巡換を含むことを示せ。
(2) H が互換を 1 つでも含めば、$H = \mathfrak{S}_p$ であることを示せ。

問 3–4. 上問を踏まえて、

(1) $f(X) = X^5 - 20X + 5 \in \boldsymbol{Q}[X]$ について、$\mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q}) \simeq \mathfrak{S}_5$ であることを示せ。
(2) $\mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q}) \simeq \mathfrak{S}_7$ となる 7 次式 $f(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ の例を作れ。

問 3–5. 4 次既約分離多項式 $f(X) \in K[X]$ の 3 次分解式を

$$R_3(T) = R(X_1X_3 + X_2X_4; f)(T) \in K[T]$$

とする (Cardano-Ferrari の分解式)。

(1) $D(f) = D(R_3)$ を示せ。
(2) $R_3(T)$ の K 内での分解様式 (および判別式) による Galois 群の識別についてまとめよ。
(3) Galois 群が D_4 または C_4 の時は、これだけでは識別できない。どうすれば識別できるか。
(4) 代わりに $R((X_1 + X_3)(X_2 + X_4); f)(T)$ を考えるとどうか。

問 3–6. 二重根号 $\xi := \sqrt{a + 2\sqrt{b}}$ の解け方の分類を、$f_\xi(X) = X^4 - 2aX^2 + (a^2 - 4b)$ の Galois 群と関連させて述べよ。

問 3–7. 5 次既約分離多項式 $f(X) \in K[X]$ に対し、

$$\begin{aligned} P = &(X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_5 + X_5X_1) \\ &- (X_1X_3 + X_3X_5 + X_5X_2 + X_2X_4 + X_4X_1) \end{aligned}$$

とおき、P^2 に関する分解式 $R_6(T) = R(P^2; f)(T) \in K[T]$ を考える (Cayley-Weber の分解式)。$R_6(T)$ の K 内での分解様式 (および判別式) による Galois 群の識別についてまとめよ。

問 3–8. 具体的な $\boldsymbol{Z}$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ で、Galois 群が決定出来るような、程々に非自明な例を作り、Galois 群を決定してみせよ。

問 3–9. 適当な体 k 上の 1 変数有理関数体 $K = k(t)$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in K[X]$ で、Galois 群が決定出来るような、程々に非自明な例を作り、Galois 群を決定してみせよ。また、$t = a \in k$ を代入して得られる多項式 $f_a(X) \in k[X]$ について、$\mathrm{Gal}(f_a/k) \subsetneq \mathrm{Gal}(f/K)$ となる $a \in k$ があればどんな時か論ぜよ。

問 3–10. $\boldsymbol{Q}$ 上の 3 変数有理関数体 $L = \boldsymbol{Q}(x_1, x_2, x_3)$ への、変数の置換作用での 3 次交代群 $\mathfrak{A}_3 \simeq C_3$ による固定体 $L^{\mathfrak{A}_3}$ を求め、その $\boldsymbol{Q}$ 上の有理性を示せ。

問 3–11. 3 次多項式 $f(t;X) := X^3 - tX^2 + (t-3)X + 1 \in \boldsymbol{Q}(t)[X]$ を考える。

(1) $\mathrm{Gal}(f/\boldsymbol{Q}(t)) = C_3$ を示せ。

(2) この多項式を知らないとして、次のことから再構成せよ。

- (a) $\boldsymbol{Q}$ 上の射影直線 $\mathbf{P}^1(\boldsymbol{Q})$ の自己同型 σ で $0 \mapsto 1 \mapsto \infty \mapsto 0$ なるものを求めよ。
- (b) これにより定まる関数体 $\boldsymbol{Q}(s)$ への 3 次巡回群 $C_3 = \langle \sigma \rangle$ の作用を考える。s の C_3-軌道を根の集合とする 3 次多項式 $g(s;X) \in \boldsymbol{Q}(s)^{C_3}[X]$ を求めよ。
- (c) この作用による固定体 $\boldsymbol{Q}(s)^{C_3}$ を求め、それが $\boldsymbol{Q}$ 上有理的 $(\exists t \in \boldsymbol{Q}(s)^{C_3} : \boldsymbol{Q}(s)^{C_3} = \boldsymbol{Q}(t))$ であることを示せ。
- (d) 適切に t を選べば、$f(t;X) := g(s;X) \in \boldsymbol{Q}(t)[X]$ により、当初の C_3-多項式が再構成される。

(3) $f(t;X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上生成的な C_3-多項式であることを、次の要領で示せ。

- (a) C_3 の $\boldsymbol{Q}$ 上の置換表現 $V_0 = \boldsymbol{Q}v_1 \oplus \boldsymbol{Q}v_2 \oplus \boldsymbol{Q}v_3$ の $\boldsymbol{Q}$-上の既約分解を求めよ。
- (b) その 2 次元既約表現 $W_0 = \boldsymbol{Q}w_1 \oplus \boldsymbol{Q}w_2$ で、射影化 $\mathbf{P}(W) \simeq \mathbf{P}^1(\boldsymbol{Q})$ への作用が、$s := -\dfrac{w_2}{w_1}$ と置くと上の C_3-作用になるような基底 (w_1, w_2) を見出せ。
- (c) $\boldsymbol{Q}$ を含む任意の C_3-拡大 $L/K/\boldsymbol{Q}$ に対し、L の K-部分空間 W で $K[C_3]$-加群 (Galois 群の作用) として $W \simeq W_0 \otimes_{\boldsymbol{Q}} K$ となるものが存在する (即ち、Galois 群が上と同様に作用するような $w_1, w_2 \in L$ が存在する) ことを示せ。(ヒント: 正規底定理と有限群の表現論の知識を用いよ。)
- (d) この w_1, w_2 から、上述に従って $s, t \in L$ を定めると、$t \in K$ であって、$s \in L$ の C_3-軌道が潰れない (C_3 が忠実に作用する) 限り、$f(t;X) \in K[X]$ について $\mathrm{Spl}(f/K) = L$ となることを示せ。
- (e) 実際、$s \in L$ の C_3-軌道が潰れないか、または、その可能性があってもその場合は w_1, w_2 を適切に取り替えれば潰れないように出来ることを示すことにより、$f(t;X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上生成的な C_3-多項式であることを導け。

問 3–12. 4 次二面体群 $D_4 = \langle \alpha, \beta \rangle (\alpha = (1\ 2\ 3\ 4), \beta = (2\ 4))$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の 2 次元既約線型表現 $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ $(\alpha : v_1 \mapsto v_2 \mapsto -v_1 \mapsto -v_2 \mapsto v_1, \beta : v_1 \mapsto v_2 \mapsto v_1)$ を考える。

(1) 2 変数有理関数体 $\boldsymbol{Q}(v_1, v_2)$ の D_4-固定体を求め、その $\boldsymbol{Q}$ 上の有理性を示せ。

(2) w_1 の D_4-軌道を根の集合とする多項式を考えることにより、D_4-多項式を構成せよ。

(3) 上で得た D_4-多項式が生成的であることを示せ。

問 3–13. 4 次二面体群 D_4 の置換表現 $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ とその射影表現 $\mathbf{P}(V)$ を考える。

(1) $w_1 := \dfrac{v_1}{v_3}, w_2 := \dfrac{v_2}{v_4}$ と置く。w_1, w_2 への D_4-作用を書き下せ。

(2) 2 変数有理関数体 $\boldsymbol{Q}(w_1, w_2)$ の D_4-固定体を求め、その $\boldsymbol{Q}$ 上の有理性を示せ。

(3) w_1 の D_4-軌道を根の集合とする多項式を考えることにより、D_4-多項式を構成せよ。

(4) 上で得た D_4-多項式が生成的であることを示せ。

問 3–14. 適当な体 k 上の有理関数体 $K = k(t_1, \ldots, t_n)$ への適当な有限群 G の作用について、程々に非自明な例を作り、固定体 K^G (やその有理性) を決定したり、分解体が K となる K^G 上の G-多項式を求めたり、その k 上での生成性について論じたりせよ。

レポート提出の要領

- 期日: 8 月 11 日 (月) まで
- 「レポート問題の例」にある問題、および本講義に関連する内容について考察した問題について、何問か (内容の重みによって分量は適宜判断せよ) を考察して提出。
- 提出: 数学領域事務室前廊下 (市谷本館 106 前) の角皆のメイルポスト。