

**3**

(1) 3 次対称群

$$\mathfrak{S}_3 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 = 1, \beta\alpha = \alpha^{-1}\beta \rangle$$

及び 4 次二面体群

$$D_4 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^2 = 1, \beta\alpha = \alpha^{-1}\beta \rangle$$

のそれぞれに対し、以下の問に答えよ。((a) ~ (d) は表にまとめると良い。)

- (a) 群の位数を求め、生成元を用いて全ての元を列挙せよ。
- (b) 各元の位数は幾つか。
- (c) 共役類を求めよ。
- (d) 各元の中心化群 (その元と可換な元全体の成す部分群) を求めよ。
- (e) 部分群を全て挙げ、包含関係を図示せよ。

- (2) 次の多項式  $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$  に対し、その  $\mathbb{Q}$  上の分解体を  $K := \text{Spl}(f/\mathbb{Q})$  とする。  
Galois 対応 (Galois 群  $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  の部分群と  $K/\mathbb{Q}$  の中間体との対応) に基  
づいて、 $K/\mathbb{Q}$  の全ての中間体の包含関係を図示して列挙せよ。
- (a)  $f(X) = X^3 - 2$  (ヒント:  $G = \mathfrak{S}_3$ )

(b)  $f(X) = X^4 - 20X^2 + 32$  (ヒント:  $G = D_4$ )