まとめ並びに演習問題及び補足 (01/08 配布)

8. $\boldsymbol{R}$を規定する公理たち

本節では、実数全体の成す順序体 $\boldsymbol{R}$ を、有理数全体の成す順序体 $\boldsymbol{Q}$ を含み所定の公理を満たすものとして定式化する、という立場で考える。

有理数全体の成す順序体 $\boldsymbol{Q}$ を含む順序体 R に対し、次は同値である：

(1) (Dedekind の公理) R の切断 (A, B) には、$\max A, \min B$ のどちらかが存在する。
(2) (上限の存在) R の空でない部分集合 X が上に有界ならば、上限 $\sup X$ が存在する。
(3) (有界単調数列の収束) R 内の上に有界な単調非減少数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、(その上限に) 収束する。
(4) (上極限の存在) R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ が存在する。
(5) (Bolzano-Weierstrass の原理) R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、集積点が存在する。
(6) (Archimedes の原理) 任意の正数 $\varepsilon, M > 0$ に対し、自然数 $N \in \boldsymbol{N}$ が存在して、$\varepsilon N > M$ となる。+ (縮小区間列の原理) R 内の閉区間の列 $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ が縮小区間列ならば、$\bigcap_{n\geq 0} I_n$ は丁度 1 点のみから成る。
(7) (Archimedes の原理) + (Cauchy 列の収束) R 内の Cauchy 列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、或る $\alpha \in R$ に収束する。(このとき R は完備であるという。)

$\boldsymbol{Q}$ を含み上のいずれか (従って全て) を満たす順序体は、自然な同型を除いて一意的である。即ち、R, R' がともに条件を満たすとするとき、順序体の構造を保つ全単射 $\varphi : R \longrightarrow R'$ で、$\boldsymbol{Q}$ 上では恒等写像であるものが一意的に存在する。

そこで、この同型を除いて定まる順序体を実数体と呼んで $\boldsymbol{R}$ と書き、その元を実数という。

以下、R を $\boldsymbol{Q}$ を含む順序体 (または素朴に知っている実数体 $\boldsymbol{R}$) とし、上に現れた用語の定義を述べながら、問を挙げる。

問 8-1A. R の部分集合 M の最小の上界を上限といい、$\sup M$ と書く。$x = \sup M$ であることは次で特徴づけられる：

(1) $\forall m \in M : m \leq x$
(2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists m \in M : x - \varepsilon < m$

問 8-2A. R の部分集合 M の下限 $\inf M$ について同様のことを考えよ。

問 8-3A. R の部分集合 M に最大値 $\max M$ が存在すれば、それは上限 $\sup M$ でもある。最小値・下限についても同様。

問 8-4A. $\boldsymbol{R}$ の次の部分集合の最大値・最小値・上限・下限は存在するか。存在するならその値は何か。

(1) 閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$
(2) 開区間 $I = (a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\}$
(3) 無限閉区間 $I = [a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x\}$
(4) 無限開区間 $I = (a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x\}$

問 8-5B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、その値のなす集合 $\{a_n | n \in \boldsymbol{N}\}$ の上限を $\boldsymbol{a}$ の上限といい、ここでは、以下、単に $\sup \boldsymbol{a}$ と書くことにする。数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$\sup \boldsymbol{a}, \sup \boldsymbol{b}$ が共に存在するとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ で定める数列 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ について、$\sup(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \leq \sup \boldsymbol{a} + \sup \boldsymbol{b}$ であることを示せ。また、等号が成り立たない例を挙げよ。

問 8-6B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $b_n := \sup\{a_m | m \geq n\}$ が存在するとき、数列 $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ は単調非増加、即ち $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ (広義単調減少ともいう。ここでは以下、これを単に単調減少ということにする。) であり、この $\boldsymbol{b}$ の下限 $\inf \boldsymbol{b}$ を、数列 $\boldsymbol{a}$ の上極限と言って、$\limsup_{n\to\infty} a_n, \overline{\lim}\, a_n, \limsup \boldsymbol{a}$ 等と書く。

(1) 上極限は次の性質で特徴付けられることを示せ：$x = \limsup_{n\to\infty} a_n \Longleftrightarrow$

- $\forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} : \exists m > n : a_m > x - \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \boldsymbol{N} : \forall m > n : a_m < x + \varepsilon$

(2) 下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n, \underline{\lim}\, a_n, \liminf \boldsymbol{a}$ も同様に定義せよ。また、上のような特徴付けを書いてみよ。

問 8-7B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、上極限・下極限がともに存在して一致すれば、$\boldsymbol{a}$ はその値に収束することを示せ。

問 8-8A. 次で定まる実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ の上極限・下極限は何か。

(1) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$ (2) $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$

問 8-9B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、α が次の性質を満たすとき $\boldsymbol{a}$ の集積値 (の一つ) であるという：

- $\forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} : \exists m > n : |a_m - \alpha| < \varepsilon$

(これは α から距離 ε 以内に無限個の a_n がある、ということと同じである。)

(1) 集積値が複数ある実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。
(2) 集積値が無限個ある実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。
(3) $\boldsymbol{a}$ の上極限が存在すれば、それは最大の集積値であることを示せ。(下極限についても同様。)
(4) $\boldsymbol{a}$ が収束すれば、その極限は唯一の集積値であることを示せ。
(5) 集積値がただ一つであっても収束しない実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。

問 8-10B. 順序体 R における Archimedes の原理は次の各々と同値であることを示せ：

(1) 自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ が R 内で上に有界でない。
(2) $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$
(注：これは ε-δ 流でちゃんと書くと、$\forall M \in R : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n > N \Longrightarrow n > M$ ということ (任意の R の元 M に対して然るべき $\boldsymbol{N}$ の元 N の存在を主張) であるから、決して単なる同語反復的命題ではない。)
(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

問 8-11B. 縮小区間列の原理では、各区間 $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n \leq x \leq b_n\}$ が閉区間であることが重要である。実数の開区間の縮小列 $I_n = (a_n, b_n) = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n < x < b_n\}$ で、$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \emptyset$ となる例を挙げよ。

問 8-12B. 通常の十進小数表記で与えられた実数 $\alpha = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ ($a_0 \in \boldsymbol{Z}$ で $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ は小数第 n 位の数値) に対し、

(1) 有理数 $a_n, b_n \in \boldsymbol{Q}$ を端点とする縮小区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ で、$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{\alpha\}$ となるものの例を挙げよ。
(2) α に収束する有理 Cauchy 列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ($a_n \in \boldsymbol{Q}$) の例を挙げよ。

問 8-13D. Archimedes の原理が成立しない順序体の例を挙げよ。更にその中で、完備 (Cauchy 列が必ず収束する) な例を挙げよ。

期末試験について

- 期日：期末試験期間中に行なう予定 (詳細は後日発表)
- 内容：授業で取り上げた内容のうちで、基本的な概念の理解や簡単な証明 (適切な書き方も含む) について。期間中の演習課題も範囲に含まれる。授業時に講義した証明の難しい部分については試験で問うに適切な範囲を超えるが、それを理解しようと取り組んだことは、基本的な概念の理解や証明の書き方の練習となり、試験に臨む準備となるだろう。