

1 整数全体の集合 Z から有理数全体の集合 Q を以下のようにして構成したい。以下では、 Z の演算に関する諸々の法則は既知とする。

(1) 集合 $X := Z \times (Z \setminus \{0\})$ 上の関係 \sim を次で定める：

$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$ に対して、

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

このとき、 \sim は X 上の同値関係となる。特にそのうち推移律を示せ。

(ヒント：「 $a, b, c \in Z, a \neq 0$ のとき $ab = ac \implies b = c$ 」を用いる必要がある。)

(2) $Q := X/\sim$ とし、 $(a, b) \in X$ の属する同値類を $a/b \in Q$ と書く。このとき、

$$a_1/b_1 + a_2/b_2 := (a_1b_2 + a_2b_1)/b_1b_2$$

により、 Q 上の演算 $+: Q \times Q \rightarrow Q$ が well-defined に定まることを示したい。

(a) 示すべきことは、次のことである：

$$\begin{cases} a_1/b_1 = a'_1/b'_1 \\ a_2/b_2 = a'_2/b'_2 \end{cases} \implies$$

(b) そのことを示せ。