2015年度秋期　現代数学B（GSE40600）　期末試験（担当：角皆）
実施：2016年1月29日(金), 13:30 〜 14:30, 3–221教室　　　　持込：不可

一般的な諸注意

- 下記をはじめとする期末試験の一般的注意に順うこと。
- 学生証または「臨時学生証（定期試験用）」を机上に提示すること。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷（白色かそれに近いもので無地)・時計（電卓機能等のないもの）のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞄の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始の指示があるまでは、問題用紙のこの面を上にしておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに、この面の記入欄に学生番号・名前をボールペン・サインペン等で記入すること。問題の書いてある面の記入欄にも記入すること（鉛筆でも可)。
- 問題文中に回答欄の指定のある問題については、解答欄に解答を記入すること。
- 問題文中に回答欄の指定がなく、この面に解答場所の指定のある問題については、この面の指定の場所に解答を記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。
- **採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。**

解答に関する数学的な諸注意

- 本試験では基本的に、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は、従来素朴に知っているものとして考えてよい。
- その他、問題の設定に順って、しかるべく解答せよ。

$\boxed{4}$

＿＿＿＿＿＿＿＿ **学部** ＿＿＿＿＿＿＿＿ **学科**

学生番号： ＿＿＿＿＿＿＿＿ **氏名：** ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1)

(2)

$\boxed{\mathbf{6}}$

(1)

(2)

1 Peano の公理系に基づいて、自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ に於ける加法 $+$ を次で定める：

- $n+0 := n$
- $n+m' := (n+m)'$

以下は、$\boldsymbol{N}$ に於ける加法 $+$ が可換律「$\forall a,b \in \boldsymbol{N} : a+b=b+a$」を満たすことの証明である。番号付の等号に対してその根拠を選択肢より答えよ。

補題 1. $\forall x \in \boldsymbol{N} : 0+x=x$

証明． x についての帰納法で示す。
$x=0$ に対し、

$$0+0 \overset{(1)}{=} 0 \qquad \boxed{(1):\quad}$$

より成立。
x について成立するとすると、x' に対し、

$$\begin{aligned} 0+x' &\overset{(2)}{=} (0+x)' && \boxed{(2):\quad} \\ &\overset{(3)}{=} x' && \boxed{(3):\quad} \end{aligned}$$

より成立。以上より帰納法完結。

補題 2. $\forall x,y \in \boldsymbol{N} : x'+y=(x+y)'$

証明． y についての帰納法で示す。
$y=0$ に対し、

$$\begin{aligned} x'+0 &\overset{(4)}{=} x' && \boxed{(4):\quad} \\ &\overset{(5)}{=} (x+0)' && \boxed{(5):\quad} \end{aligned}$$

より成立。
y について成立するとすると、y' に対し、

$$\begin{aligned} x'+y' &\overset{(6)}{=} (x'+y)' && \boxed{(6):\quad} \\ &\overset{(7)}{=} ((x+y)')' && \boxed{(7):\quad} \\ &\overset{(8)}{=} (x+y')' && \boxed{(8):\quad} \end{aligned}$$

より成立。以上より帰納法完結。

(左下より)

以上の準備の下に、可換律の証明に入る。
b についての帰納法で示す。
$b=0$ に対し、

$$\begin{aligned} a+0 &\overset{(9)}{=} a && \boxed{(9):\quad} \\ &\overset{(10)}{=} 0+a && \boxed{(10):\quad} \end{aligned}$$

より成立。
b について成立するとすると、b' に対し、

$$\begin{aligned} a+b' &\overset{(11)}{=} (a+b)' && \boxed{(11):\quad} \\ &\overset{(12)}{=} (b+a)' && \boxed{(12):\quad} \\ &\overset{(13)}{=} b'+a && \boxed{(13):\quad} \end{aligned}$$

より成立。以上より帰納法完結。(証明終)

選択肢：
(a) 帰納法の仮定
(b) $+$ の定義のうち $n+0:=n$
(c) $+$ の定義のうち $n+m':=(n+m)'$
(d) $0'=1$
(e) 補題 1
(f) 補題 2
(g) $\boldsymbol{N}$ での $+$ の可換律
(h) $\boldsymbol{N}$ での $+$ の結合律

2 実数列 $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

(1) $\boldsymbol{a}$ が実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に収束することを表す論理式を、式中の $\boxed{\quad}$ に下記の選択肢から補充することにより、完成させよ。

$$\boxed{\quad} : \boxed{\quad} : \boxed{\quad} : n>N \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon$$

選択肢：$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\varepsilon>0,\quad \forall n\in\boldsymbol{N},\quad \exists n\in\boldsymbol{N},\quad \forall N\in\boldsymbol{N},\quad \exists N\in\boldsymbol{N}$

(2) $\boldsymbol{a}$ が Cauchy 列であることを数式・論理記号を用いて書き表せ。

$\boxed{\quad}$

(3) この否定「$\boldsymbol{a}$ が Cauchy 列でない」ということを数式・論理記号を用いて書き表せ。

$\boxed{\quad}$

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ **学部** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ **学科**

学生番号： ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ **氏名：** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{R}$ の次の部分集合 X_i に対して、最大値・最小値・上限・下限がそれぞれ存在するか。存在するならその値を解答欄に記せ。存在しないなら「なし」と記せ。

$\boldsymbol{R}$ の部分集合	最大値	最小値	上限	下限
$X_1 = [-5, 4) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid -5 \leq x < 4\}$				
$X_2 = \left\{ \dfrac{1}{n} \middle\vert n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$				
$X_3 = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^3 \leq 2\}$				

$\boxed{4}$ (裏面の指定場所に記述せよ。) 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$$a_n \longrightarrow \alpha, b_n \longrightarrow \beta \text{ ならば } a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta$$

であることを (ε-N 流で) 示せ。

$\boxed{5}$ (裏面の指定場所に記述せよ。) $\sqrt{3}$ は無理数 (即ち、$\sqrt{3} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$) である。

(1) $\sqrt{3}$ に収束する有理 Cauchy 列 (各項が有理数である Cauchy 列) の例を挙げよ。

(2) $\boldsymbol{Q}$ の切断 (A, B) で、$\sqrt{3}$ に対応するものを挙げよ。

$\boxed{6}$ 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ から有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ を以下のようにして構成したい。以下では、$\boldsymbol{Z}$ の演算に関する諸々の法則は既知とし、$\boldsymbol{Q}$ に関しては未知とする。文中の $\boxed{}$ に補充して完成させた上で、証明を裏面の指定場所に記述せよ。

(1) 集合 $X := \boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} \setminus \{0\})$ 上の関係 $\sim$ を次で定める：
$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$ に対して、

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff \boxed{}$$

このとき、$\sim$ は X 上の同値関係となる。特にそのうち推移律の証明を記述せよ。
(注意：$\boldsymbol{Z}$ の乗法に関する消約律「$a, b, c \in \boldsymbol{Z}, a \neq 0$ のとき $ab = ac \Longrightarrow b = c$」を用いる必要がある。証明中でこれを用いた部分を明記せよ。)

(2) $\boldsymbol{Q} := X/\sim$ とし、$(a, b) \in X$ の属する同値類を $a/b \in \boldsymbol{Q}$ と書く。このとき、

$$a_1/b_1 + a_2/b_2 := \boxed{}$$

により、$\boldsymbol{Q}$ 上の演算 $+ : \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ が well-defined に定まることを示したい。このとき、示すべきことは、次のことである：

$$\begin{cases} a_1/b_1 = a_1'/b_1' \\ a_2/b_2 = a_2'/b_2' \end{cases} \Longrightarrow \boxed{}$$

このことの証明を記述せよ。