

## 有限オートマトン (5/25 配布)

### (決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- $Q$  : 有限集合 … 状態の集合
- $\Sigma$  : 有限集合 … 入力文字の集合 (“alphabet”)
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  : 遷移関数
- $s \in Q$  … 初期状態
- $F \subset Q$  … 受理状態の集合

### (決定性) 有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  が語  $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$  を受理 (accept) する  
 $\iff \exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$  :

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- $r_n \in F$

### 非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- $Q$  : 有限集合 … 状態の集合
- $\Sigma$  : 有限集合 … alphabet,  $\Sigma_\epsilon := \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  : 遷移関数 … 可能な遷移先全体の集合  
( $\mathcal{P}(Q)$  は  $Q$  の冪集合)
- $s \in Q$  … 初期状態
- $F \subset Q$  … 受理状態の集合

### 非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  が語  $w \in \Sigma^*$  を受理する  
 $\iff \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma_\epsilon, \exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$  :

- $w = a_1 a_2 \cdots a_n$
- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- $r_n \in F$

### 決定性有限オートマトンと非決定性有限オートマトンとの同等性

与えられた非決定性有限オートマトン  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  に対し、 $M$  が認識する言語  $L(M)$  を認識する決定性有限オートマトン  $\tilde{M} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$  が次で構成できる：  
まず、各状態  $q \in Q$  に対し、 $E(q) \subset Q$  を次で定める：

$$E_0(q) := \{q\}, \quad E_{i+1}(q) := \bigcup_{r \in E_i(q)} \delta(r, \epsilon), \quad E(q) := \bigcup_{i \geq 0} E_i(q)$$

( $E(q)$  は状態  $q$  から入力を何も読まずに遷移できる状態全体)

- $\tilde{Q} := \mathcal{P}(Q)$  : 現在あり得る状態全体の集合
- $\tilde{\delta} : \tilde{Q} \times \Sigma \rightarrow \tilde{Q}$  :  $\tilde{q}$  の何処かから入力  $x$  で遷移できる状態全体

$$(\tilde{q}, x) \mapsto \tilde{\delta}(\tilde{q}, x) := \bigcup_{q \in \tilde{q}} \left( \bigcup_{r \in \delta(q, x)} E(r) \right)$$

- $\tilde{s} := E(s)$
- $\tilde{F} := \{\tilde{q} \in \tilde{Q} \mid \tilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$  : あり得る状態のどれかが受理状態

### Pumping Lemma (注入補題・反復補題)

正規言語  $A$  に対し、

$\exists n \in \mathbf{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz$  s.t.

(1)  $y \neq \epsilon$  (2)  $|xy| \leq n$  (3)  $\forall k \geq 0 : xy^k z \in A$